СЕНТЯБРЬСКАЯ ОЛИМПИАДА 2012

9 – 16 сентября 2012

**Проведение олимпиады поддерживают**:

Московский институт открытого образования

СУНЦ МГУ – Школа им. Колмогорова

Компания «Яндекс»

1. *Сколько таких целых чисел* $n$*, что* $(n-3)|(n^{3}-3)$*?*

**Решение:**

$n^{3}-3=\left(n-3\right)\left(n^{2}+3n+9\right)+24$ ⬄ $(n-3)|24$.

У числа 24 16 целых делителей.

Значит, $n$ = (-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27).

**Ответ: 16**

1. *Пусть* $x, y, z, u, v, w$ *–целые положительные числа такие, что*

$$x+\frac{1}{y+\frac{2003}{z}}=u+ \frac{1}{v+\frac{2003}{w}}$$

*Найдите наибольшее возможное значение разности* $y-v$*.*

**Решение:**

Так как $y+\frac{2003}{w}>1$ , то целая часть слева равна x, а справа u => x = u. Значит, y – v = 2003/w – 2003/z < 2003, т.к. w >= 1 и 2003/z > 0.

Значит, оценка на 2002.

Пример $0+\frac{1}{2003+\frac{2003}{2003}}=0+ \frac{1}{1+\frac{2003}{1}}$

**Ответ: 2002**

1. *Длина стороны треугольника 10 м, длинв медианы, проведенной к ней, 9 м, а длина ещё одной медианы 6 м. Найдите площадь треугольника.*

**Решение:**

В треугольнике ABC

BC = 10, медиана AA1 = 9, медиана BB1 = 6.

Пусть центр масс – М.

Тогда ВМ = 2/3ВВ1 = 4, МА1 = 1/3АА1 = 3, ВА1 = 1/2ВС = 5 => треугольник BMA1 прямоугольный, площадь 6, площадь АВА1 в 3 раза больше и равна 18 => площадь треугольника 36

**Ответ: 36**

1. *Девочка рисует на плоскости одинаковые квадраты, которые не имеют общих внутренних точек, а мальчик их раскрашивает. Если квадраты пересекаются по ненулевому отрезку стороны, то они должны быть покрашены в разные цвета. Какое минимальное число цветов необходимо мальчику?*

**Решение:**

Пример, что нельзя в 3 цвета покрасить – на каждом шаге цвет выбирается однозначно, старт в левом верхнем углу, переходы показаны стрелочками, первые 2 цвета – не нарушая общности 1 и 2. Клетка с символом «?» граничит и с 1-м, и со 2-м, и с 3-м цветом, значит 3-х не хватит.

Почему хватит 4-х. Понятно, что если у квадратиков 2-х нет параллельных сторон, то они никогда не пересекутся по стороне и можно эти задачи решать независимо. Поэтому у всех квадратиков стороны параллельны или перпендикулярны. Разобьем плоскость на квадратики со стороной 1 без нижней и правой стороны (см. рис.), их стороны параллельны квадратикам, которые рисует девочка. Присвоим каждому число от 1 до 4 как показано на рисунке (на четных строках 1,2,1…; на нечетных – 3,4,3…) Пусть девочка нарисовала квадратик А, его левый верхний угол попал в квадратик разбиения с числом i, раскрасим А в цвет i. Очевидно, что в каждый квадратик разбиения попало не больше 1 верхнего левого угла из нарисованных квадратиков (т.к. любой такой содержит правый нижний угол квадратика разбиения с какой-нибудь маленькой окрестностью, а квадраты не перес. по внутренним точкам). Ещё очевидно, что квадратик с левым верхним углом в квадратике разб. с номером i не заденет других с номером i, а значит и других покрашенных в цвет i, т.к. они ниже или левее одной из границ квадратика разбиения.

**Ответ: 4**

1. *Пусть прямые a, b, c проходят соответственно через вершины A, B, C треугольника ABC и пересекаются в одной точке. Тогда прямые a’, b’, c’, симметричные прямым a, b, c относительно соответствующих биссектрис из вершин A, B, C, тоже пересекаются в одной точке. Эта точка называется изогонально сопряженной предыдущей. Сколько точек изогональное сопряжение оставляет на месте?*

**Решение:**

Пусть X остается на месте. Если Х не совпадает с А, то ХА при отражении относительно биссектрисы переходит в себя. Значит, ХА – внутренняя или внешняя биссектриса угла А. Х не совпадает хотя бы с 2-мя вершинами, => Х может быть только точкой пересечения каких-нибудь 2-х биссектрис. Таких точек 4 – центры вневписанных и вписанной окружностей.

**Ответ: 4**

1. *В круговом турнире участвовало 2013 команд и не было ничьих. Найдите максимальное возможное количество таких троек команд, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, а третья у первой.*

**Решение:**

Всего троек команд (2007 \* 2006 \* 2005 / 6). Посчитаем «неправильные» тройки, то есть те, которые не образуют цикл. Пусть di – количество входящих стрелок в вершину i. Сумма d равна (2007 \* 2006 / 2). В любой неправильной тройке есть пара ребер, входящих в 1 вершину, поэтому у нас есть биекция между неправ. тройками и парами входящих в одну вершину ребер. Последних Сумма (di2-di)/2 минимальна, если все они равны, так как a(a-1) + b(b-1) > (a+b)((a+b)/2-1), т.к. a\*a + b\*b > 2ab. Поэтому так как количество «правильных» троек равно количество всего минус количество неправильных, последнее минимально если di равны, то есть все по 1003, пример – i-я команда выиграла i+1, …i+1003, остальным проиграла. Значит, ответ (669 \* 1003 \* 2005 – 2007 \* 1003 \* 501) = 336845514.

 **Ответ: 336845514**

1. *На окружности радиуса 1 отмечена точка A, и из нее циркулем делается засечка по часовой стрелке радиусом a. Из полученной точки делается еще одна засечка, и так повторяется 2012 раз. Какое максимальное количество различных дуг при этом может получиться?*

**Решение:**

Назовем точки А1,…А2012. Рассмотрим какую-нибудь дугу AkAl­, на которой нет больше точек Аi. У нас после 2012-го хода может быть несколько дуг с такими длинами. Рассмотрим первый момент, когда первый раз появилась дуга с такой длиной, при этом больше точек на этой дуге не появится. Пусть это AkAl­. Но Ak-1Al­-1 такая же по длине, при этом если на Ak-1Al­-1 есть Ах, то на AkAl. есть Ax+1– противоречие кроме k=1, l=1 или x = 2012, если k=1 или l=1, то 2 дуги получается, а если x = 2012, то «А2013» попадет на нашу дугу, итого 3 дуги.

Пример – длина шага $L=\frac{2π+1/10000 }{2012}$; дуги – L, 1/10000 и L – 1/10000.

**Ответ: 3**

1. *Какое максимальное число непересекающихся заборов можно построить в городе, где 2012 домов, если каждый забор огораживает хотя бы один дом и никакие два забора не огораживают одну и ту же совокупность домов.*

**Решение:**

Индукция по n. Докажем, что ответ 2n-1 от всех меньших n к n. База n = 1 очевидна. Шаг. Рассмотри максимальное разбиение. Очевидно, есть забор, который содержит все (иначе добавим его). Уберем его. Получилось несколько заборов непересекающихся (так как любые 2 либо вкладываются, либо не пересекаются). Если их больше 2-х, то возьмем любые 2, обнесем забором и увеличим оценку. Противоречие. Значит, их 2 – по х и у вершин в каждом, их внутренние заборы не пересекаются. Одного быть не может, потому что мы уже выкинули один забор, содержащий все. По предположению индукции заборов тогда не больше чем 2x – 1 + 2y – 1. Ещё 1 глобальный, x + y = n. Итого 2n – 1.

**Ответ: 2n – 1**

1. *Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше 2012 цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую —- с четной суммой цифр. Для скольких k среди 1; 2; :::; 2011 сумма k-х степеней всех чисел первой группы равна сумме k-х степеней всех чисел второй группы?*

**Решение:**

Докажем утверждение задачи индукцией по количеству цветов n. База для n=2. Рассмотрим самый левый квадрат K. Если он первого цвета, то все квадраты второго цвета имеют с ним общую точку, следовательно, каждый квадрат второго цвета содержит одну из двух правых вершин квадрата K, следовательно, все квадраты второй системы можно прибить двумя гвоздями. Индукционный переход. Пусть мы доказали утверждение задачи для n цветов, докажем для (n+1)-го цвета. Рассмотрим все квадраты и выберем из них самый левый квадрат K. Пусть он покрашен в (n+1)-ый цвет. Все квадраты, пересекающие K, содержат одну из двух его правых вершин, следовательно, их можно прибить двумя гвоздями. Уберем со стола все квадраты (n+1)-го цвета и квадраты других цветов, пересекающие K. Остались квадраты n различных цветов. Нетрудно доказать, что если выбрать n квадратов разных цветов, то среди них найдутся два пересекающихся. (Иначе, добавим квадрат K и получим n+1 попарно не пересекающихся квадратов разных цветов, что противоречит условию задачи.) Таким образом, по индукционному предположению, можно выбрать один из цветов i и прибить 2k-2 гвоздями все оставшиеся на столе квадраты этого цвета. Убранные квадраты цвета i пересекают самый левый квадрат K, следовательно, эти квадраты можно прибить, забив два гвоздя в правые вершины квадрата K. Чтд. Если в вопросе заменить «одним гвоздем» на «n гвоздями», то получится

**Ответ: 4022?**

1. *На плоскости проведены 2012 непараллельных прямых, не все из которых проходят через одну точку. Незнайка сосчитал все получившиеся пустые треугольники. Какое наименьшее число у него могло получиться?*

**Решение:**

Эта задача разбиралась в Кванте 1992 год №11, статья «Треугольники и катастрофы». Основная идея в том, что мы фиксируем прямые l1 и l2 и двигаем остальные с постоянными скоростями vi, где vi – скорость прямой в перпендикулярном направлении. Хотим двигать так, чтобы размеры всех треугольников сохранялись. Утверждается, что для одного треугольника это можно записать линейным однородным уравнением от vi, vj, vk. Пусть треугольник ABC перешел в A1B1C1, тогда ABA1B1 и ещё 2 таких – параллелограммы, сумма их площадей равна 0 (ориент., прямая двигается в положительную сторону если треугольник увеличивается, это линейное однородное уравнение на скорости). Итак, у нас k < n - 2 однородных уравнения и n - 2 неизвестных, решается (k треугольников в разбиении, предположили, что k < n – 2). Можно считать, что некая прямая li двигается навстречу точке пересечения l1 и l2 (или обратим ход времени) . Существует момент, когда 3 прямых в одной точке (момент t) , тогда в момент t1 = t – d / (2 max(vi)) есть 3 прямые, образующие пустой треугольник со стороной меньше d, противоречие. Но у нас прямые не общего положения, поэтому при движении будут разрушаться точки многократного пересечения и появляться новые треугольнички, они будут расти, а наш, который мы нашли, наоборот сжимается, поэтому их легко отличить, то есть это будет один из «старых» треугольников. Чтд.

1. *Имеются одна красная и 2012 синих ячеек, а также колода из 2n карт, занумерованных числами от 1 до 2n. Первоначально вся колода лежит в произвольном порядке в красной ячейке. Из любой ячейки можно взять верхнюю карту и переложить ее либо в пустую ячейку, либо поверх карты с номером, большим на единицу. При каком наибольшем n можно такими операциями переложить всю колоду в одну из синих ячеек?*

**Решение:**

Ответ k – 1. Пример, показывающий, что если n >= k это невозможно. Положим наверх карты так 1, 3, 5…2n-1, 2n, 2n-2, 2n-4, … 2. Первые N ходов могут быть только перекладывания нечетных в свободные. n+1-й может быть только перекладывание 2n-1 обратно на 2n, обратные ходы бессмысленны. Значит, нельзя. Оценка. Разобьем карточки на пары (2i-1, 2i). Каждой паре сопоставим ячейку и есть ещё «свободная» клетка. Теперь каждую пару стараемся положить в свою ячейку, если не можем, то перекладываем 2i-1 в свободную, 2i в свою, 2i-1 в свою. Чтд.

**Ответ: k – 1, при k = 2012 n <= 2011.**

1. *Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Хорды BA и BC внешней окружности касаются внутренней в точках K и M соответственно. Пусть Q и P – середины дуг AB и BC, не содержащих точку N. Окружности, описанные около треугольников BQK и BPM, пересекаются второй раз в точке G. Если известно, что BP = 2, BG = 7, P Q = 3, то чему равняется BQ?*

**Решение:**

1) Точки Q и G лежат по разные стороны от BK, а точки G и P по разные стороны отн. BM, остальные случаи аналогично. N, M, P на 1 прямой, т.к. касательная в P параллельна касательной в M => есть гомотетия отн. точки N, переводящая окружности друг в друга, а M в P. Тогда угол KQB + KGB = pi (XYZ означает угол XYZ) KQB + BPM = pi; KGB + KQB = pi => K, G, M на 1 прямой => BQG = BKG = KNM = GMB = GPB => т.к. QBP + QNP = pi, то BPGQ – параллелограмм. Поэтому сумма квадратов диаг.=сумме квадратов сторон => BQ = 5тогда в треугольнике QBP неравенство треугольника не выполняется, противоречие.

**Ответ: противоречивая конструкция.**