Зачёт

группа «Воче»

1. Делится ли число $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ на $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 11$?
2. Найдите какой-нибудь такой x, что $44x \equiv 1111 \pmod 7$.
3. Докажите, что если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$
4. **(письменно)** Докажите, что если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.
5. Сколько существует двузначных чисел, которые делятся на три?
6. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?
7. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «ЭПИГРАФ», чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?
8. **(письменно)** Попробуйте объяснить следующее свойство: $C_n^k = C_n^{n-k}$

Зачёт

группа «Поврче»

1. Для любого натурального n докажите, что $10^{2n-1} + 23$ делится на 11.
2. Пусть n, k — натуральные числа. Докажите равенство: $\phi(n^k) = n^{k-1}\phi(n)$.
3. Дана последовательность $a_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ ($a_0 = 5, a_1 = 15$, и так далее). Существуют ли пять идущих подряд её членов, кратных 2020?
4. **(письменно)** *Существование обратного*: Докажите, что для любых a, m, если $(a, m) = 1$ (т.е. a и m взаимно просты), то найдется такое b, что $a \cdot b \equiv 1 \pmod m$
5. У Тома Сойера есть забор из n досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить в этом заборе чётное число досок?
6. Отображение называется монотонным, если $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Сколько существует монотонных инъекций из множества $\{1, 2\}$ в множество $\{1, 2, \ldots, n\}$?
7. Придумайте и докажите формулу для $(a + b + c)^n$.
8. **(письменно)** Вспомните и напишите, как найти количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$.