Малая теорема Ферма, функция Эйлера, первообразный корень

группа «Поврче»

Теоремы:

Малая теорема Ферма: для произвольного a и простого p верно, что, если $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv 1(mod\ \ p)$

Теорема Эйлера: $\forall a, m$, если $(a, m) = 1 \quad \Rightarrow \quad a^{\phi(m)} \equiv 1(mod\ \ m)$

(Док-во на паре)

1. Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что:

   а) $p^q + q^p \equiv p + q(mod\ \ pq)$;

   б) $[\frac{p^q+q^p}{pq}]$ — чётное число, если p, $q \neq 2$.

2. Докажите, что при простом p верно $(a_1+a_2+...+a_n)^p \equiv a_1^p+a_2^p+...+a_n^p(mod\ \ p)$. С помощью этой вспомогательной подзадачи докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого целого x верно $(P(x))^p \equiv P(x^p)(mod\ \ p)$

3. Решите в натуральных числах уравнение $\phi(4^x 6^y) = 2\phi(35^z)$.

4. Докажите, что при любом нечётном n число $2^{n!} - 1$ делится на n. (Подсказка: используйте теорему Эйлера)

5. Докажите, что для любого простого p существует бесконечно много таких n, что $2^n - n$ делится на p

Определение: *Функция Эйлера*: $\phi(n)$ — количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n; $(n \in \mathbb{N})$.

1. Вычислите $\phi(17)$, $\phi(p)$, $\phi(p^2)$.

2. Выведите и запомните формулу для $\phi(p^\alpha)$, где p — простое число, $\alpha \in N$.

3. Пусть n, k — натуральные числа. Докажите равенство $\phi(n^k) = n^{k-1}\phi(n)$.

4. Докажите, что функция Эйлера *мультипликативна*.

   Определение: фукция f называется *мультипликативной*, если $\forall a, b$ таких, что НОД$(a, b) = 1$ выполняется $f(ab) = f(a)f(b)$

5. Докажите равенство $\sum_{d|n} \phi(d) = n$, рассмотрев n дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$ (Подсказка: сократите каждую дробь.)

6. Докажите, что $\phi(n) = n \cdot \prod\limits_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ (Подсказка: используйте задачи 1 и 3)