Арифметика остатков, продолжение делимости

группа «Поврче»

1. Докажите, что $\forall a, n \in \mathbb{N}$ верно $(a,n) = 1 \iff \exists b : a \cdot b \equiv 1(mod\ \ n)$
   (примечание: это не самая тривиальная задача в этом листочке, но при этом одна из самых важных)

2. Найдите все простые числа p, для которых:
   а) числа $p + 10$ и $p + 14$ также простые;
   б) числа $p + 2$, $p + 8$, $p + 14$ и $p + 26$ также простые;
   в) числа $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ также простые.
   (Подсказка: используйте остатки по простому модулю.)

3. Найдите остаток от деления $7^{7^{7^7}}$ на 10.

4. Делится ли $222^{555} + 555^{222}$ на 7

5. Вася выписал на доску все натуральные числа от 1 до 100, начав с числа 50. Докажите, что в некоторый момент сумма всех выписанных чисел делилась на 3

6. Докажите, что:
   а) (теорема Вильсона) для простого p: $(p-1)! \equiv -1(mod\ \ p)$.
   б) p — простое тогда и только тогда, когда $(p-2)! \equiv 1(mod\ \ p)$.
   в) если простое $p = 4k + 1$, то $\exists z : z^2 + 1$ делится на p

7. Рассмотрим числа Фибоначчи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $(n \geq 2)$. Докажитеследующие свойства: (a) $2 \mid F_n \iff 3 \mid n$; (b) $3 \mid F_n \iff 4 \mid n$; (c) $4 \mid F_n \iff 8 \mid F_n$.

8. * Пусть первое число Фибоначчи, делящееся на m, есть F_k. Докажите, что $m \mid F_n$ тогда и только тогда, когда $k \mid n$. (Подсказка: докажите тождество $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ и воспользуйтесь им)

9. Докажите, что при $m \neq n$ выполняются равенства:
   а) $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$, при $(a > 1)$;
   б) $(f_n, f_m) = 1$, где $f_k = 2^{2^k} + 1$ – числа Ферма.

10. а) Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $[6x] + [x] \geq [3x] + 2[2x]$.

б) : $*$ Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ число $\frac{(6n)!n!}{(3n)!(2n)!^2}$ является целым. (Вам доступна опция 'подсказка', обратитесь за ней к преподавателю)

Примечание: имеет смысл рассматривать остатки от деления на 3,4,5 (иногда на 7,8,9) квадратов и кубов чисел;
например, полезно подумать, какие остатки от деления на 4 могут давать квадраты натуральных чисел

1. Целые числа a, b, c и d таковы, что $a^4+b^4+c^4+d^4$ делится на 5. Докажите, что abcd делится на 625

2. Доказать, что уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$ не имеет решений в целых числах.

3. Докажите, что существует бесконечно много таких троек чисел $n-1$, n, $n+1$, что:

   а) n представимо в виде суммы двух квадратов натуральных (целых положительных) чисел, а $n-1$ и $n+1$ – нет;

   б) каждое из трёх чисел представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

   в) не существует 4х последовательных чисел, каждое из которых представимо в виде суммы 2х квадратов

4. Докажите, что:

   а) Простые числа вида $p = 4k+3$ не представимы в виде суммы 2х квадратов. Более того, если число (a^2+b^2) делится на простое вида $p = 4k+3$, то $p \mid a$, $p \mid b$

   б) Если n представимо в виде суммы 2х квадратов, то и $2n$ тоже представимо в виде суммы 2х квадратов.

      Более общий факт: если числа a и b представимы в виде суммы 2х квадратов, то и ab, их произведение, тоже представимо в виде суммы 2х квадратов.

   в) *(теорема Ферма-Эйлера) Простые числа вида $p = 4k+1$ представимы в виде суммы 2х квадратов

      (Этот пункт — задача-шутка, решать её не надо)