Делимость, признаки делимости, НОД и НОК

группа «Поврче»

1. $34a = 43b$, докажите, что $a + b$ составное
2. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 33$.
3. Докажите, что число имеет нечетное число делителей тогда и только тогда, когда оно — точный квадрат.
4. Посчитайте количество делителей
   а) числа $p^2 \cdot q^3$, где p, q — простые числа;
   б) * числа 16! (Подсказка: обратите внимание на следующую задачу)
5. Пусть $n \in N$, p — простое число. (обозначение: $v_p(x)$ — степень, в которой p входит в x; например, $v_3(45) = 2$, так как $18 = 3^2 \cdot 5$):
   Докажите, что $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{n}{p^k}]$; ($[x]$ — целая часть от x, например, $[3.123] = 3$)
6. * (сложная) Примитивные пифагоровы тройки. Найдите все натуральные решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ с условием, что НОД$(x, y, z) = 1$. Утверждения-подсказки:
   а) Числа x, y, z попарно взаимно просты.
   б) Числа x, y разной чётности, z нечётно (подсказка: подумайте об остатках от деления на 4).
   в) Пусть x четно, решите задачу 5(а) для чисел y, z.
   г) Все решения с чётным x получаются по формулам: $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$, где a, b — взаимно простые натуральные числа разной чётности, $a > b$.

НОД, наибольший общий делитель (двух) чисел — это наибольший среди делителей этих (двух) чисел.

НОК, наименьшее общее кратное (двух) чисел — это наименьшее такое число, которое делится на эти (два) числа.

Важная лемма. Пусть $c \mid ab$, причём НОД$(a, c) = 1$. Тогда $c \mid b$.

1. *Важное следствие.* Докажите, что:
   а) Пусть p — простое число и $p \mid ab$. Тогда хотя бы одно из чисел a, b делится на p.

   б) Пусть X делится на числа n и m, причем n и m взаимно просты. Тогда X делится на $n \cdot m$

2. Докажите, что
   а) НОД$(a, b)\cdot$ НОК $(a, b) = a \cdot b$
   б) Приведите пример, когда равенство НОД$(a, b, c)\cdot$НОК$(a, b, c) = abc$ не выполнено. Каким неравенством всегда будут связаны числа НОД$(a, b, c)\cdot$НОК(a, b, c) и abc ?

3. a и b – натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

4. Пусть a, b,c — нечётные целые числа. Докажите равенство
   а) НОД$(a, b) =$ НОД$(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$
   б) НОД$(a, b, c) =$ НОД$(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2})$.

Признаки делимости:

- на 2 или 5: последняя цифра делится на 2 или 5 соответственно
- на 3 или 9: сумма цифр делится на 3 или 9 соответственно

1. а) Докажите признаки делимости выше.
   б) Вдохновившись доказательством признака делимости на 2, сформулируйте и докажите признак делимости на 2^n для произвольного натурального n.
   в) Вдохновившись доказательством признака делимости на 9, сформулируйте и докажите признак делимости на 11.

2. Известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.

3. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось АБ$\times$ВГ $=$ ДДЕЕ. Докажите, что он где-то ошибся.

4. Может ли число $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

5. Доказать, что число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120 при любом натуральном n.

6. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

7. а) Дано шестизначное число $abcdef$, причём $abc + def$ делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37. (Подсказка: подумайте о числе 999)
   б) * Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.