Всего два выхода для честных ребят
Схватить карандаш и переставлять всё подряд
Или задать мне вопрос, вопрос, вопрос, вопрос
Если всерьёз воспринимать этот лист...

У вас элементы не в том порядке разложены

группа «Поврче»

Определения:

Перестановка — это взаимно-однозначное *отображение* (*биекция*) множества $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ на себя. Записываются перестановки обычно *табличкой*: $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{smallmatrix}\right)$, такая запись обозначает, что $\sigma(a_i) = b_i$, т.е. элемент a_1 отображается в элемент b_1, a_2 — в b_2 и так далее, a_n отображается в b_n ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — это числа $1, 2, \ldots, n$, только *в другом порядке*, так же и с $b_1, b_2, \ldots b_n$).

Перестановки можно ***перемножать***, это делается следующим образом: пусть $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{smallmatrix}\right)$, $\tau = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{smallmatrix}\right)$ — перестановки, тогда $\xi = \sigma \circ \tau$ — перестановка, отображающая a_i в c_i, то есть $\xi = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{smallmatrix}\right)$, то есть мы *применяем* к множеству $\{1, 2, \ldots n\}$ поочереди сначала τ, затем σ ($a_i \xrightarrow{\tau} b_i \xrightarrow{\sigma} c_i$. Говорят, что ξ — это ***композиция*** перестановок σ и τ).

Транспозиция — перестановка, меняющая местами только 2 элемента, т.е. имеющая вид $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots i-1 & i & i+1 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots i-1 & j & i+1 & \ldots & j-1 & i & j+1 & \ldots & n \end{smallmatrix}\right)$, обозначается (i, j).

Цикл — перестановка, сдвигающая какие-то элементы по *циклу*, т.е. имеющая вид $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & i_1 & \ldots & i_2 & \ldots & \ldots & i_{k-1} & \ldots & i_k & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & i_2 & \ldots & i_3 & \ldots & \ldots & i_k & \ldots & i_1 & \ldots & n \end{smallmatrix}\right)$, обозначается $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ (это означает, что i_1 переходит в i_2, i_2 — в i_3 и т.д., i_k — в i_1, т.е. $i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_k \to i_1$).

Тождественная перестановка, соответственно, имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{smallmatrix}\right)$ и обозначается id.

Определения 2:

Рассмотрим последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; *пара* чисел a_i, a_j называется ***инверсией***, если $i < j$, но $a_i > a_j$ (схожий термин: *беспорядок* — это такая пара элементов i, j, что $i < j$, но при этом $\sigma(i) > \sigma(j)$).

Знак перестановки σ — это число 1, если в последовательности $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ чётное число инверсий, и -1 в противном случае (обозначается $sgn(\sigma)$).

Порядок перестановки σ — это такое натуральное число n, что $\sigma^n = id$ и для любого меньшего натурального числа это условие не выполняется.

Примечание: вообще говоря, правильно называть предмет нашего разговора *подстановкой*, но мы для удобства не будем углубляться в тонкости терминологии.

1. Перемножить перестановки в указанном и обратном порядках:

   (a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ (b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

2. Докажите, что любую перестановку можно предстваить в виде композиции некоторого числа:

   (a) транспозиций (подсказка: представьте, что у вас есть полка с книгами в некотором порядке, которую нужно отсортировать, а вы умеете менять местами любые две из них); (b) непересекающихся циклов; (c) транспозиций вида $(1, k)$; (d) транспозиций вида $(k, k+1)$.

3. Записать в виде произведения независимых циклов перестановки:

   (a) $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&1&5&6&7&8&2&4 \end{smallmatrix}\right)$ (b) $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&\dots&2n-1&2n \\ 2&1&4&3&\dots&2n&2n-1 \end{smallmatrix}\right)$ (c) $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&\dots&n&n+1&n+2&\dots&2n \\ n+1&n+2&\dots&2n&1&2&\dots&n \end{smallmatrix}\right)$

4. Записать в виде таблицы перестановки:

   (a) $(136)(247)(5)$; (b) (1654237); (c) $(135\dots2n1)(246\dots2n)$.

5. Перемножить перестановки:

   (a) $(135)(2467)\circ(147)(2356)$; (b) $(13)(57)(246)\circ(135)(24)(67)$.

6. Докажите, что множество всех перестановок образует *группу* относительно операции *композиции*. (Эта группа обозначается S_n)

7. Определить число инверсий в последовательностях:

   (a) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$; (b) $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \dots, 2n$;

   (c) $k, k+1, \dots, n, 1, 2, \dots, k-1$; (d) $k, k+1, \dots, n, k-1, k2, \dots, 2, 1$.

8. Докажите, что чётность числа инверсий в последовательности $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ совпадает с чётностью числа транспозиций в любом разложении σ на транспозиции. (подсказка: докажите, что чётность числа инверсий меняется при транспозиции)

9. Определить четность перестановок:

   (a) $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 2&4&1&7&6&5&3 \end{smallmatrix}\right)$ (b) $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 3&5&8&7&2&6&1&4 \end{smallmatrix}\right)$ (c) $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&\dots&n-1&n \\ n&1&n-1&2&\dots&\dots& \end{smallmatrix}\right)$

   (d) $(123\dots k)$; (e) цикл длины k: $(i_1 i_2 \dots i_k)$; (f) $(1473)(67248)(32)$;

   (g) $(i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6)\dots(i_{2k-1} i_{2k})$; (h) $(i_1 \dots i_p)(j_1 \dots j_q)(k_1 \dots k_r)(l_1 \dots l_s)$.

10. Каких перестановок больше: чётных или нечётных?

11. Число инверсий в нижней строке перестановки $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&\dots&n \\ a_1&a_2&\dots&a_n \end{smallmatrix}\right)$ равно k. Найти число инверсий в нижней строке перестановки $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&\dots&n \\ a_n&a_{n-1}&\dots&a_1 \end{smallmatrix}\right)$.

Оставаться на месте было нельзя, чтобы не умереть бесполезно.

Разговоры о высоком, но в облике перестановок

группа «Поврче»

1. Сколько всего существует различных перестановок на n элементах?
2. Найти сумму числа инверсий нижних строк во *всех* перестановках $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. (Подсказка: воспользуйтесь задачей 11 из предыдущего листа)
3. Пусть задано число k, причем $1 \le k \le C_n^2$. Доказать, что в S_n существует перестановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, число инверсий в нижней строке которой равно k.
4. Пусть задана перестановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, причем число инверсий в нижней строке равно k. Доказать, что:

   а) σ является произведением k транспозиций вида $(q, q+1)$, где $1 \le q \le n-1$;

   б) нельзя представить в виде произведения менее k транспозиций указанного вида.
5. Выяснить, как изменяется разложение перестановки в произведение независимых циклов при умножении ее на некоторую транспозицию.
6. Пусть $\pi, \sigma \in S_n$, причем σ является циклом длины k. Доказать, что $\pi\sigma\pi^{-1}$ также является циклом длины k.
7. Доказать, что всякая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена как произведение нескольких сомножителей, равных циклам (12) и $(123\ldots n)$. .
8. Является ли S_n *циклической* группой (т.е. порождена ли она одним элементом)?
9. Доказать, что чётные перестановки на n элементах образуют группу (обозн. A_n).
10. Доказать, что всякая четная перестановка может быть представлена как:

    (a)произведение тройных циклов; (b)произведение циклов вида $(12k), 3 \le k \le n$
11. Пусть σ цикл длины n; m — натуральное число. Доказать, что:

    а) если $m \mid n$, то σ^m является произведением m циклов длины $\frac{n}{m}$;

    б) если m взаимно просто с n, то σ^m является циклом длины n;

    в) если $d = \text{НОД}(n, m)$, то σ^m является произведением d циклов длины $\frac{n}{d}$.
12. Для любой $\sigma \in S_n$ доказать, что существуют такие $\alpha, \beta \in S_n$, что $\sigma = \alpha \circ \beta$ и $\alpha^2 = \beta^2 = id$.