

Делимость, признаки делимости, НОД и НОК

группа «Воче»

- Верно ли, что:
 - $2^3 \cdot 3$ делится на 6
 - $3^4 \cdot 5^2$ делится на $3^2 \cdot 5^3$
 - 504 делится на 6^2
- Верно ли, что:
 - если число делится на 3 и 4, то оно делится на $3 \cdot 4 = 12$
 - если число делится на 6 и 4, то оно делится на $4 \cdot 6 = 24$
 - если число x не делится на 3, то число $35 \cdot x$ тоже не делится на 3
- $34a = 43b$, докажите, что $a + b$ составное
- Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 33$.
- Посчитайте количество делителей
 - числа $p^2 \cdot q^3$, где p, q — простые числа;
 - * числа $16!$
- * Докажите, что число имеет нечетное число делителей тогда и только тогда, когда оно — точный квадрат.

НОД, наибольший общий делитель (двух) чисел — это наибольший среди делителей этих (двух) чисел.

НОК, наименьшее общее кратное (двух) чисел — это наименьшее такое число, которое делится на эти (два) числа.

Важная лемма. Пусть $c \mid ab$, причём $\text{НОД}(a, c) = 1$. Тогда $c \mid b$.

- Важное следствие.* Докажите, что:
 - Пусть p — простое число и $p \mid ab$. Тогда хотя бы одно из чисел a, b делится на p .
 - Пусть X делится на числа n и m , причем n и m взаимно просты. Тогда X делится на $n \cdot m$
- Докажите, что

- а) $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$
- б) Приведите пример, когда равенство $\text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(a, b, c) = abc$ не выполнено. Каким неравенством всегда будут связаны числа $\text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(a, b, c)$ и abc ?
3. a и b – натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab . Докажите, что $a = b$.
4. Пусть a, b, c – нечётные целые числа. Докажите равенство
- а) $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$
- б) $\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$.

Признаки делимости:

- на 2: последняя цифра делится на 2
 - на 5: последняя цифра делится на 5
 - на 3: сумма цифр делится на 3
 - на 9: сумма цифр делится на 9
 - на 11: разность суммы цифр на четных позициях и суммы цифр на нечетных позициях делится на 11
1. Докажите признаки делимости выше.
2. Известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.
3. Доказать, что число
- а) $(n - 1)n(n + 1)$ делится на 6;
- б) * $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120 при любом натуральном n .
4. Может ли число $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?
5. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом.
6. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось $AB \times VG = DDEE$. Докажите, что он где-то ошибся.
7. а) Дано шестизначное число $abcdef$, причём $abc + def$ делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.
- б) * Сформулируйте (или спросите у преподавателя) и докажите признак делимости на 37.