

Делимость и остатки группа «Бобице♡»

1. Докажите:

- а) $a \equiv a \pmod{m}$.
- б) Если $x \equiv y \pmod{m}$, а $s \equiv t \pmod{m}$, то $x + s \equiv y + t \pmod{m}$
- в) Если $a \equiv b \pmod{m}$, а $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
- г) Если $x \equiv y \pmod{m}$, а $s \equiv t \pmod{m}$, то $x \cdot s \equiv y \cdot t \pmod{m}$
- д) Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a \cdot h \equiv b \cdot h \pmod{m}$, где $h \in \mathbb{Z}$
Верно ли обратное? Ответ обоснуйте.
- е) Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, где $n \in \mathbb{N}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Любое натуральное число в десятичной записи дает такой же остаток при делении:

- на 2 и 5, как и его последняя цифра;
- на 2^n и 5^n , как и число, образованное последними n его цифрами;
- на 3 и 9, как и его сумма цифр.

2. Найдите остатки от деления:

- а) 6^{100} на 7;
- б) 5^{102} на 103;

в) 3^{104} на 103;

г) $4^{18} + 5^{17}$ на 3.

д) $13^{16} - 2^{55} \cdot 5^{15}$ на 3.

-
- 3. Докажите, что если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.
 - 4. В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{337} - 1$. Не опечатка ли это?
 - 5. Найти все пятизначные числа вида $\overline{31X7Y}$, которые без остатка делятся на 15.
 - 6. Докажите, что произведение последней цифры числа 2^n и суммы всех цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.
 - 7. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.
 - 8. На доске было написано число из нескольких семёрок: $777 \dots 77$. Влад стёр у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стёртую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию, и так далее. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.