Дискретная непрерывность

1. В ряд выписаны целые числа, причём каждые два соседних отличаются ровно на 1. Самое левое число равно -10, а самое правое равно 10. Докажите, что в этом ряду есть число 0.

2. Первый тайм футбольного матча закончился со счётом 0:1, а матч – со счётом 4:3. Докажите, что в некоторый момент счёт на табло был ничейным.

3. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

4. В ряд лежат 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары – черные. Докажите, что можно убрать справа несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

5. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них п ,овернулись налево, некоторые – направо, а остальные – кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

6. За круглым столом сидят рыцари и лжецы, причём и тех, и других - чётное количество. Всегда ли можно разделить стол на две части так, что в каждой части будет ровно половина всех рыцарей и ровно половина всех лжецов?

7. В пяти вазочках лежат конфеты. Если во всех вазочках лежит разное количество конфет, то Андрей добавляет четыре конфеты в вазочку, в которой меньше всего конфет. Докажите, что рано или поздно количество конфет в каких-то двух вазочках сравняется.

8. В некоторыъ клетках таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что модуль суммы всех чисел не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 модуль суммы не превосходит 25.

9. За круглом столом сидит 10 мальчиков и 10 девочек. Докажите, что найдется группа из 10 сидящих подряд детей, в которой девочек и мальчиков поровну.

10. Журнал «Юный диверсант» выходит нерегулярно — два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 — 2001, №2 — 2001, №3 — 2002, ... Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

11. К автомату с газированной водой стояла очередь из ста гномов. Газировка бывает двух сортов: с сиропом – за 3 копейки и без сиропа – за 1 копейку. Самый первый гном купил газировку с сиропом, а второй – без сиропа. Верно ли, что в некоторый момент гномов, уже купивших газировку с сиропом было столько же, сколько гномов, собиравшихся купить газировку без сиропа?

12. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

13. * 2n радиусов разделили круг на 2n равных секторов: n синих и n красных, чередующихся в произвольном порядке. В синие сектора, начиная с некоторого, записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до n по порядку. В красные сектора, начиная с некоторого, записывают те же числа, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до n.

14. * На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?