Доски

1. Зал имеет форму правильного треугольника, разделенного на 25 маленьких залов той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая ни один из залов более одного раза. Найти наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

2. Докажите, что при любом покрытии шахматной доски 32 костяшками домино получится чётное число вертикально расположенных и чётное число горизонтально расположенных костяшек. (Каждая костяшка покрывает ровно две клетки доски.)

3. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом.

4. Можно ли замостить доску 1001×1001 доминошками 1×2, которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3, которые разрешается располагать только вертикально? (Две стороны доски условно считаются горизонтальными, а две другие – вертикальными.)

Таблицы

5. В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32?

6. Можно ли расставить в клетках квадрата 8×8 числа от 1 до 64 так, чтобы число в каждой клетке было или больше всех чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, или меньше всех этих чисел?

7. Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а цифры другого разряда шли бы подряд (например (54, 55, 56, 57); (44, 54, 64, 74)).