НОД, НОК и алгоритм Евклида

Определение. *Наибольшим общим делителем* натуральных чисел a и b называется наибольший из общих делителей чисел a и b. Обозначение: НОД(a, b) или просто (a, b).
Определение. *Наименьшим общим кратным* двух чисел a и b называется наименьшее число, которое делится на a и на b. Обозначение: НОК(a, b) или $[a, b]$.

1. Докажите, что $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.
2. Найдите НОД и НОК чисел
   а) 1485 и 2925;
   б) $99! + 100!$ и $101!$.

Алгоритм Евклида нахождения НОД двух чисел

Пусть a и b — натуральные числа, $a > b$.

Будем производить деления с остатком, пока не получим в остатке 0:

$$\begin{array}{ccccccccl}
a & = & b & \cdot & q_1 & + & r_1, & & 0 < r_1 < b, \\
b & = & r_1 & \cdot & q_2 & + & r_2, & & 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 & = & r_2 & \cdot & q_3 & + & r_3, & & 0 < r_3 < r_2, \\
 & \dots & & & & & & & \\
r_{k-2} & = & r_{k-1} & \cdot & q_k & + & r_k, & & 0 < r_k < r_{k-1}, \\
r_{k-1} & = & r_k & \cdot & q_{k+1} & + & r_{k+1}, & & r_{k+1} = 0.
\end{array}$$

Тогда $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{k-1}, r_k) = (r_k, 0) = r_k$.

---

3. Найдите
   а) $(1254, 399)$;
   б) $(7387, 82861)$;
   в) $(2001, 22012000)$.
4. От нарисованного прямоугольника $a \times b$ отрезают квадраты наибольшей площади, пока он целиком не разрежется на квадраты.
   а) Квадраты какого размера были получены в процессе?
   б) Приведите пример a и b при которых прямоугольник разрезается ровно на n квадратов.
5. При каких целых n дробь $\dfrac{5n+6}{8n+7}$ несократима?
6. Докажите, что число (a, b) можно выразить линейно через a и b (т.е. существуют такие целые x и y, что $(a, b) = ax + by$).
7. Пусть $(m, 360) = 1$. Докажите, что только с помощью одного циркуля можно разделить угол в m градусов на m равных частей.