

Делимость, НОД и НОК

Арифметика делимости

1. Пусть x и y целые числа такие, что $x + y$ делится на 23. Докажите, что $12x + 35y$ тоже делится на 23.
2. Целые числа a и b таковы, что число $a^2 + b^2$ делится на $a + b$. Докажите, что число $(a + 3b)(3a + b)$ также делится на $a + b$.
3. При каких натуральных n число $n^2 + 8n + 15$ делится на $n + 4$?
4. Каким может быть наибольший общий делитель чисел $2m + 3k$ и $m + 5k$, если m и k — взаимно простые целые числа?

Разложение на простые множители

5. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 100?
6. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.
7. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?
8. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 11 нулей?