

Четность: арифметика

1. Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством в 1, 3 и 5 рублей?
2. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?
(*Магический квадрат* — это квадратная таблица, заполненная числами, в которой суммы чисел во всех строках и столбцах равны.)
3. Джарвис и Говард играют в такую игру. Джарвис берёт в каждую руку по монетке: в одну — 10 центов, а в другую — 25. После этого содержимое левой руки он умножает на 6, 14, 18 или 26, а содержимое правой руки — на 7, 11, 23 или 35. Затем Джарвис складывает два получившихся произведения и называет Говарду результат. Может ли Говард, зная этот результат, определить, в какой руке у Джарвиса — правой или левой — монета достоинством в 10 центов?
4. Лизун ползёт по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90° каждые 30 минут. Докажите, что он может вернуться в исходную точку только: а) через целое число часов; б) через чётное число часов.
5. Можно ли представить 1 в виде суммы дробей $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, где a, b, c и d — нечётные натуральные числа?
6. Найдите все такие наборы целых чисел (a, b, c) , для которых

$$(3a - b)(3b - c)(3c - a) = 15015.$$

7. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.