

# Доски и таблицы

## Доски

1. В популярной игре «Тетрис» нужно заполнять ряды фигурками из четырех клеток ( $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ ). Можно ли без перекрываний и пробелов заполнить прямоугольник  $6 \times 10$ ...  
... только фигурами вида  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  и  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$ ?  
... только фигурами вида  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ ?  
... только фигурами вида  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$ ?  
... только фигурами вида  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  и  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ & \square \end{smallmatrix}$ ?  
2. На каждой клетке доски размером  $9 \times 9$  сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. Какое наименьшее число клеток могут оказаться свободны?  
3. Можно ли доску  $9 \times 9$  покрыть уголками из трёх клеток ( $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ )? Уголки можно поворачивать и переворачивать.

## Таблицы

4. Прямоугольная таблица из  $m$  строк и  $n$  столбцов заполнена числами так, что сумма чисел в любой строке равна 1, а сумма чисел в любом столбце равна 2.  
5. В клетки таблицы  $100 \times 100$  записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11?  
6. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них нарисованы звёздочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звёздочек в ее столбце совпадает с количеством звёздочек в ее строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звёздочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звёздочка.