

Графы

Степени вершин

1. Лемма о рукопожатиях.

Докажите, что в любом графе количество нечётных вершин чётно.

2. В математической стране Графляндии 2019 городов. Из любого города выходят ровно 20 дорог, причем от любого города можно добраться до любого. Из-за ежегодного неожиданного наступления зимы, одна дорога пришла в негодность — ее пришлось закрыть на ремонт. Верно ли, что, как раньше, от любого города можно проехать к любому?

3. Эйлеровы графы.

Докажите, что все рёбра графа можно обойти ровно по одному разу тогда и только тогда, когда в этом графе количество нечётных вершин равно 0 или 2. В каком из этих случаев обход является циклом?

Деревья

4. Докажите, что следующие свойства графа равносильны:

- граф связный и без циклов;
- каждые две вершины графа соединены ровно одним простым путем;

Такой граф называется *деревом*.

5. Докажите, что число вершин дерева на единицу больше числа его ребер.

6. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.