

Планиметрия (10 класс)

- Два квадрата.
- Биссектриса в параллелограмме.
- Три общие хорды.
- ТТорриччелли.

Задачи (нечётные на занятия, чётные самостоятельно)

1. Физтех–2019, билет 03

Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD , касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E так, что $CE = 9$, $ED = 7$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: 6 и $96 + 24\sqrt{7}$

2. Физтех–2019, билет 04

Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Окружность Ω вписана в угол BAD , касается отрезка BC в точке C и повторно пересекает CD в точке E так, что $CE = 7$, $ED = 9$. Найдите радиус окружности Ω и площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: $2\sqrt{7}$ и $56\sqrt{7}$

3. Физтех–2019, билет 11

В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 10$, $BC = 24$.

Ответ: $\frac{289}{338}$ или $\frac{1}{2}$

4. Физтех–2019, билет 12

В окружность Ω радиуса 17 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 30$, $BC = 16$.

Ответ: $\frac{529}{578}$ или $\frac{1}{2}$

5. Физтех–2018, билет 05

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD , и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M . При этом $AM = 8/5$ и $MD = 12/5$. Аналогично, прямая, проходящая

через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N . При этом $BN = 30/11$ и $NC = 25/11$.

- (a) Найдите отношение $AB : CD$.
- (b) Найдите длины сторон AB и CD , если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

Ответ: 4:5, 4, 5

6. *Физтех–2018, билет 06*

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD , и в каждый из полученных треугольников ABD и BDC вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M . При этом $AM = 25/7$ и $MD = 10/7$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N . При этом $BN = 3/2$ и $NC = 9/2$.

- (a) Найдите отношение $AB : CD$.
- (b) Найдите длины сторон AB и CD , если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

Ответ: 5:6, 5, 6

7. *Физтех–2018, билет 13*

Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P . Известно, что расстояния от точки P до сторон AB , BC , CD , DA равны 4 , $\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$, $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

- (a) Найдите отношение $AP : PC$.
- (b) Найдите длину диагонали BD , если дополнительно известно, что $AC = 10$.

Ответ: 4, $35/\sqrt{19}$

8. *Физтех–2018, билет 14*

Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке Q . Известно, что расстояния от точки Q до сторон AB , BC , CD , DA равны 5 , $\sqrt{3}$, $\frac{5}{\sqrt{7}}$, $5\sqrt{\frac{3}{7}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки Q на стороны, лежат на этих сторонах).

- (a) Найдите отношение $AQ : QC$.
- (b) Найдите длину диагонали BD , если дополнительно известно, что $AC = 12$.

Ответ: 5, $24/\sqrt{7}$