

Логарифмы — 1

- Решите уравнение $\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2$.
- Решите неравенство $(4-x)^{x^2-9} - \sin^2 10^\circ < (4-x)^{\log_{\cos 10^\circ}^{-1} \sqrt{4-x}}$.

Задачи (нечётные на занятии, чётные самостоятельно)

1. Физтех-2019, билет 06

Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}(1+x^2) \cdot \log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}(1-x^2) + 1 \right) \log_{1-x^4} \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \right) \geq 1.$$

Ответ: $x \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{5}] \cup (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

2. Физтех-2019, билет 07

Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}} \left(1 + \frac{x^2}{4} \right) \cdot \log_{\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) + 1 \right) \log_{1-\frac{x^4}{16}} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} + \frac{19}{27} \right) \geq 1.$$

Ответ: $x \in [-\frac{4}{3}; 0) \cup (0; \frac{8}{15}] \cup (\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$

3. Физтех-2018, билет 10

Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх чисел $\log_x \left(x - \frac{5}{2} \right)$, $\log_{x-\frac{5}{2}}(x-4)$ и $\log_{x-4} x$ равно произведению двух остальных.

Ответ: $\frac{9}{2}; 2 + \sqrt{5}$

4. Физтех-2018, билет 11

Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх чисел $\log_x \left(x - \frac{13}{6} \right)$, $\log_{x-\frac{13}{6}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

Ответ: $\frac{11}{3}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

5. Физтех-2017, билет 02

Решите неравенство $\left(\sqrt[10]{125} \right)^{\log^2_{\sqrt{5}} x} + 3 \geq x^{\log_5 x} + 3 \left(\sqrt[5]{x} \right)^{\log_5 x}$.

Ответ: $x \in (0; 5^{-\sqrt{\log_5 3}}] \cup \{1\} \cup [5\sqrt{\log_5 3}; +\infty)$

6. Физтех-2017, билет 03

Решите неравенство $x^{\log_{13} x} + 7 \left(\sqrt[3]{x} \right)^{\log_{13} x} \leq 7 + \left(\sqrt[3]{13} \right)^{\log^2_{\sqrt{13}} x}$.

Ответ: $x \in (0; 13^{-\sqrt{\log_{13} 7}}] \cup \{1\} \cup [13\sqrt{\log_{13} 7}; +\infty)$

7. Физтех-2016, билет 22

Решите неравенство $5^{\frac{x+5}{x+4}} \cdot 3^{x+4} \geq 75$.

Ответ: $x \in (-4; -3] \cup [\log_3 5 - 4; +\infty)$

8. Физтех-2016, билет 23

Решите неравенство $11^{\frac{3x-4}{4-x}} \cdot 3^{4-x} \leq 99$.

Ответ: $x \in [4 - 4 \log_3 11; 2] \cup (4; +\infty)$

9. Физтех-2015, билет 02

Решите уравнение $\left(\frac{x}{243}\right)^{\log_2\left(\frac{9x}{4}\right)} = \frac{729}{x^4}$.

Ответ: $x = \frac{243}{4}, x = \frac{1}{9}$

10. Физтех-2015, билет 03

Решите уравнение $\left(\frac{x}{400}\right)^{\log_5\left(\frac{x}{8}\right)} = \frac{1024}{x^3}$.

Ответ: $x = \frac{8}{5}, x = 16$

Дополнительные задачи

• Решите неравенство $\frac{1 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+4} + \log_{1/2}(13-x)}{|x^2 + 2x - 3| - |2x^2 - 10x + 8|} \geq 0$.

Ответ: $x \in (-4; 1) \cup (1; \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}; 11)$

• Решите уравнение $|\log_2(2x+7)| = \log_2(1+|x+3|) + \log_2(1-|x+3|)$.

Ответ: $x = -3$

• Числа a_1, \dots, a_5 при $n = 2, 3, 4$ удовлетворяют равенствам

$$\log_2 a_n \cdot \log_2(a_{n-1}a_{n+1}) = \log_2 a_{n-1} \cdot \log_2 a_{n+1} \cdot \log_2(4a_n^2),$$

причём $a_1 = 2, a_5 = 2^{1/25}$. Найдите $\log_2(a_2 + 2a_3 - a_4^4)$.

Ответ: $1; \frac{10}{9}$