

Комбинаторика и теория чисел — 2

Комбинаторика

- Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?
- Сколько существует различных ожерелий из 17 попарно разноцветных бусин?

Теория чисел

- При каких цифрах x, y число $\overline{12x45y}$ делится на 39?
- Решите в натуральных числах уравнение $x^2 = 2^y + 1$.

Задачи (нечётные на занятии, чётные самостоятельно)

1. Физтех–2019, билет 14

Есть 183 различные карточки с числами $1, 2, 11, 2^2, 11^2, \dots, 2^{91}, 11^{91}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 22?

Ответ: 184 275

2. Физтех–2019, билет 15

Есть 195 различных карточек с числами $1, 5, 7, 5^2, 7^2, \dots, 5^{97}, 7^{97}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 35?

Ответ: 223 488

3. Физтех–2018, билет 10

Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 5 с целыми неотрицательными показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{85} .

Ответ: 16511

4. Физтех–2018, билет 11

Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 5 с целыми неотрицательными показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 49^{68} .

Ответ: 4760

5. *Физтех–2017, билет 10*

Дано число 800...008 (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 14080

6. *Физтех–2017, билет 11*

Дано число 500...005 (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 165. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 17280

7. *Физтех–2015, билет 05*

Найдите количество пар целых $(x; y)$ таких, что $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{100}$.

Ответ: 19594

8. *Физтех–2015, билет 08*

Найдите количество пар целых $(x; y)$ таких, что $x^2 + 7xy + 6y^2 = 15^{50}$.

Ответ: 4998

9. *Физтех–2013, билет 01*

Дан правильный 18-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 40° . (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 216

10. *Физтех–2013, билет 02*

Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45° . (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 384

Дополнительные задачи

Комбинаторика

Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдите сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).

Ответ: 1769580

Теория чисел

Множество содержит более семи различных, попарно не взаимно простых натуральных чисел. Найдите эти числа, если их наименьшее общее кратное равно 210, а произведение делится на 1920 и не является квадратом целого числа.

Ответ: 6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210