

# Комбинаторика и теория чисел — 1

## Комбинаторика

- Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?
- Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно составить из слова «ОЛИМПИАДА»?

## Теория чисел

- Найдите все числа вида  $\overline{13xy45z}$ , которые делятся на 792.
- Решите в натуральных числах уравнение  $x^2 = 3^y + 1$ .

## Задачи (нечётные на занятия, чётные самостоятельно)

### 1. Физтех–2019, билет 6

На столе лежат 140 различных карточек с числами 4, 8, 12, . . . , 556, 560 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 149 224

### 2. Физтех–2019, билет 7

На столе лежат 200 различных карточек с числами 201, 203, 205, . . . , 597, 599 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 437 844

### 3. Физтех–2018, билет 2

На каждой из прямых  $x = 2$  и  $x = 9$  отмечено по 400 точек с ординатами 1, 2, 3, . . . , 400. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 321372

### 4. Физтех–2018, билет 3

На каждой из прямых  $y = 1$  и  $y = 12$  отмечено по 200 точек с абсциссами 1, 2, 3, . . . , 200. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 80268

5. *Физтех–2017, билет 2*

На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке  $(55; 40)$ . Найдите количество таких квадратов.

Ответ: 1560

6. *Физтех–2017, билет 3*

На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке  $(25; 60)$ . Найдите количество таких квадратов.

Ответ: 650

7. *Физтех–2016, билет 10*

В числе  $2*0*1*6*0*$  нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3645

8. *Физтех–2016, билет 36*

В числе  $2*0*1*6*0*2*$  нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184

9. *Физтех–2014, билет 02*

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение  $x^5y^3 = 18^{50} \cdot 10^{33}$ ?

Ответ: 126

10. *Физтех–2014, билет 03*

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение  $x^7y^2 = 12^{55}15^{30}$ ?

Ответ: 144

## Дополнительные задачи

### Комбинаторика

Автобусный билет считается счастливым, если первые три цифры его шестизначного номера нечётны и различны, а вторые — чётны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров счастливых билетов?

Ответ: 7200

### Теория чисел

Найдите сумму всех натуральных чисел  $n$ , для которых числа 5600 и 3024 делятся соответственно на  $n$  и  $n + 5$ .

Ответ: 30