Метод площадей

1. **Медиана как ГМТ.**

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC, площадь которого равна 36, взяты соответственно точки M и K так, что $AM/MB = 1/3$, а $AK/KC = 2/1$. Найдите площадь треугольника AMK.

3. **Лемма об отношении площадей.**

4. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны точки P, Q, R соответственно, причём отрезки AP, BQ, CR пересекаются в точке M. Известно, что $AR : RB = 4 : 5$, $CM : MR = 3 : 7$. Найдите $CQ : QA$ и $CP : PB$.

5. **Теорема Чевы.** На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны точки P, Q, R соответственно. Докажите, что отрезки AP, BQ, CR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\dfrac{AR}{RB} \cdot \dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{CQ}{QA} = 1$.

6. **Обобщённая теорема Чевы.** На прямых BC, CA, AB, содержащих стороны $\triangle ABC$, даны точки P, Q, R соответственно. Докажите, что прямые AP, BQ, CR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$.

7. Выведите из теоремы Чевы, что...
   а) ... медианы... б) ... биссектрисы... в) ... высоты...
   ... треугольника пересекаются в одной точке.

8. **Теорема Ван-Обеля.** Чевианы AP, BQ, CR треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\dfrac{CM}{MR} = \dfrac{CQ}{QA} + \dfrac{CP}{PB}$.

9. Дан треугольник ABC. На сторонах BC и CA даны точки P и Q такие, что $CP : PB = 5 : 3$, $CQ : QA = 1 : 7$. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке R. Найдите $BR : RA$.

10. **Теорема Менелая.** Дан треугольник ABC. На сторонах BC и CA даны точки P и Q, а на продолжении стороны AB дана точка R. Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$.

11. **Обобщённая теорема Менелая.** На прямых BC, CA, AB, содержащих стороны треугольник ABC даны точки P, Q, R соответственно. Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1$.

12. Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на одной прямой.

Метод площадей

1. **Медиана как ГМТ.**

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC, площадь которого равна 36, взяты соответственно точки M и K так, что $AM/MB = 1/3$, а $AK/KC = 2/1$. Найдите площадь треугольника AMK.

3. **Лемма об отношении площадей.**

4. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны точки P, Q, R соответственно, причём отрезки AP, BQ, CR пересекаются в точке M. Известно, что $AR : RB = 4 : 5$, $CM : MR = 3 : 7$. Найдите $CQ : QA$ и $CP : PB$.

5. **Теорема Чевы.** На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны точки P, Q, R соответственно. Докажите, что отрезки AP, BQ, CR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\dfrac{AR}{RB} \cdot \dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{CQ}{QA} = 1$.

6. **Обобщённая теорема Чевы.** На прямых BC, CA, AB, содержащих стороны $\triangle ABC$, даны точки P, Q, R соответственно. Докажите, что прямые AP, BQ, CR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$.

7. Выведите из теоремы Чевы, что...
   а) ... медианы... б) ... биссектрисы... в) ... высоты...
   ... треугольника пересекаются в одной точке.

8. **Теорема Ван-Обеля.** Чевианы AP, BQ, CR треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\dfrac{CM}{MR} = \dfrac{CQ}{QA} + \dfrac{CP}{PB}$.

9. Дан треугольник ABC. На сторонах BC и CA даны точки P и Q такие, что $CP : PB = 5 : 3$, $CQ : QA = 1 : 7$. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке R. Найдите $BR : RA$.

10. **Теорема Менелая.** Дан треугольник ABC. На сторонах BC и CA даны точки P и Q, а на продолжении стороны AB дана точка R. Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$.

11. **Обобщённая теорема Менелая.** На прямых BC, CA, AB, содержащих стороны треугольник ABC даны точки P, Q, R соответственно. Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1$.

12. Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на одной прямой.