Планиметрия на физтехе

1. [Физтех-2011. № 4] В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $1/4$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что $\angle BED = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF , проведённую к стороне BC, и длину отрезка CD. Найдите площадь параллелограмма, если $AB = BE$.

$\boxed{DF = \frac{8}{25},\ CD = \frac{8}{7},\ S_{ABCD} = \frac{16}{25}}$

2. [Физтех-2012. № 4] В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектиса угла BAD пересекает сторону CD в точке E, а прямую BC — в точке F, причём $AE \perp CD$, $EF = 4$. Найдите длины отрезков AE и AD, а также площадь трапеции.

$\boxed{AE = 12,\ AD = 15,\ S_{ABCD} = 96}$

3. [Физтех-2012. № 4] Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружно- стью — A и B, с большей окружностью — C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = 24/5$, $AC = 12$.

$\boxed{3 \text{ и } 12}$

4. [Физтех-2013. № 5] Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC < AD$, $\angle BCD = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M, а $\cos\angle BMC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC, а также площадь трапеции.

$\boxed{AB = 10,\ BC = \frac{10}{9},\ S_{ABCD} = \frac{200\sqrt{2}}{9}}$

5. [Физтех-2013. № 5] В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin \frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN = 11$, $BL = 6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

$\boxed{S_{ABCD} = 60\sqrt{6},\ R = \frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}}$

6. [Физтех-2014. № 4] Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{17}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 4, описанная вокруг треугольника BCK, касается отрезка AD и прямой AB. Найдите длину отрезка AB, угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

$\boxed{AB = 2,\ \angle BAD = 2 \operatorname{arctg} 2,\ S_{ABCD} = \frac{232}{25}}$

7. [Физтех-2014. № 4] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD, касается отрезков BC, CD и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $BM = 3$, а четырёхугольник $KOBA$ вписан в окружность Ω. Найдите угол COD, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

$\boxed{\angle COD = 90^\circ,\ S_{ABCD} = 26,\ R = \frac{5\sqrt{13}}{6}}$

8. [Физтех-2015. № 7] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K, а вторая касается стороны AD в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $BK = 3\sqrt{3}$, $DT = \sqrt{3}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

$\boxed{\text{а) } 3;\ \text{б) } 30^\circ}$

9. [Физтех-2016. № 4] Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = DE = 2$, $CD = 1$. Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

$\boxed{R = \frac{8}{\sqrt{19}};\ r = \frac{11}{2\sqrt{19}}}$

10. [Физтех-2016. № 4] Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω. Точка F — середина дуги PN, не содержащей точки Q. Известно, что расстояния от точки F до прямых PN и QN равны соответственно 5 и $20/3$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ.

$\boxed{R = 6,\ S_{NPQ} = \frac{35\sqrt{35}}{6}}$

11. [Физтех-2017. № 4] В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная l к окружности ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9. а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC. б) Найдите радиус окружности ω и длину стороны AB.

$\boxed{\text{а) } 5;\ \text{б) } r = \frac{32}{7},\ AB = \frac{16}{\sqrt{7}}}$

12. [Физтех-2017. № 4] Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

а) 14; б) $45°$, $S_{ABCD} = 97$

13. [Физтех-2018. № 5] Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM, где M — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника EBM.

$BC = 5$, $BK = \frac{24}{5}$, $P_{EBM} = \frac{42}{5}$

14. [Физтех-2018. № 5] Окружность Ω радиуса 3 касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC, $KC = 1$, $AL = 6$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK, AB и площадь треугольника CMN.

$\angle ABC = 120°$, $MK = 3$, $AB = \frac{7\sqrt{21}}{4}$, $S_{CMN} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

15. [Физтех-2019. № 4] Хорды AB и CD окружности ω с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности ω равен 2,5, а точка T — центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

а) $AP = 8$, б) $PT = \frac{\sqrt{409}-5}{2}$, $S_{APC} = \frac{5760}{409}$

16. [Физтех - 2019. № 4] Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая l проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке

C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длине отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

$$\boxed{HP = 7\sqrt{46},\ r = 5\sqrt{\frac{138}{7}},\ R = 5\sqrt{\frac{322}{3}}}$$