Квадратный трехчлен
Упражнения

0. Уравнение x^2+px+q имеет корни, равные x_1 и x_2. Напишите уравнение, корнями которого будут числа y_1 и y_2, равные:
а) x_1^3, x_2^3 б) $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}$ в) $x_1+\frac{1}{x_1}$, $x_2+\frac{1}{x_2}$ г) $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}$.

1. Известно, что $5a+3b+3c=0$ при условии $a \neq 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

2. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из 5 его корней равен 2 . Найдите второй корень, если известно, что $f(0)=3$.

3. Игорь с каждым приведённым квадратным трёхчленом делает следующее: рисует его график, ищет точки пересечения с осями координат и, если получит 3 точки, проводит через эти точки окружность. Докажите, что все такие окружности проходят через одну точку.

4. На параболе $y=x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

5. Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство $a^2+ab+b^2 \geq 3(a+b-1)$.

6. График квадратичной функции $y=ax^2+c$ пересекает оси координат в вершинах правильного треугольника. Чему равно ac?

7. Корни квадратного трёхчлена $f(x)=x^2+ax+b$ равны m_1 и m_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x)=x^2+px+q$ равны k_1 и k_2. Докажите, что $f(k_1)+f(k_2)+g(m_1)+g(m_2) \geq 0$.

8. Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5 в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно.

9. Известно, что многочлены ax^2+bx+c и bx^2+cx+a $(a \neq 0)$ имеют общий корень. Найдите его.

10. $a, b, c \in \mathbb{Z}$, причем $b \neq c$. Известно, что квадратные трехчлены ax^2+bx+c и $(c-b)x^2+(c-a)x+(a+b)$ имеют общий корень (не обязательно целый). Докажите, что $(a+b+2c) \vdots 3$.

11. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-11x+29=0$. Найдите выражение: $\frac{3}{x_1^2}+7x_1^2+6x_1x_2+\frac{3}{x_2^2}+7x_2^2$.

Задачи

1. [Физтех-2019-11 №1] Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)=x^2-ax+2$,

$f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3 - 2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6 - a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$, значения A,B,C,D, a, b не даны.

$\boxed{\frac{1}{3}}$

2. [СПбГУ-2012-11 №2] Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на промежутке $[0; 1]$.

3. [Физтех-2018-11 № 2] Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + g(x)$ равно -6.

$\boxed{\frac{11}{2}}$

4. [Физтех-2018-10. № 3] Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}$$

Найдите все возможные значения a.

$\boxed{a = 10}$

5. [Физтех-2017-10. № 1] Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

$\boxed{\text{Увеличится на } \frac{9}{2}}$

6. [Физтех-2018-10. № 2] Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 11g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

$\boxed{A = 0,\ A = -11}$

7. [Физтех-2017-10. № 1] Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

$\boxed{\frac{41}{4}}$