

Алгебраические задачи

Утверждение 1 Справедливы следующие оценки:

- $ax^2 + bx + c \geq c - \frac{b^2}{4a}$, при $a > 0$;
- $ax^2 + bx + c \leq c - \frac{b^2}{4a}$, при $a < 0$

Утверждение 2 Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0, D = b^2 - 4ac$). Тогда:

- $f(x)$ имеет 2 корня разных знаков тогда и только тогда, когда $ac < 0$;
- $f(x)$ имеет 2 различных корня одного знака тогда и только тогда, когда $D > 0$ и $ac > 0$;
- $f(x)$ имеет 2 различных положительных корня тогда и только тогда, когда $D > 0, ac > 0$ и $ab < 0$;
- $f(x)$ имеет 2 различных отрицательных корня тогда и только тогда, когда $D > 0, ac > 0$ и $ab > 0$.

Утверждение 3 (Следствие теоремы Виета)

$$(ax_1) + (ax_2) = -b$$

$$(ax_1)(ax_2) = ac$$

Утверждение 4 Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0, D = b^2 - 4ac, x_0 = -\frac{b}{2a}$). Тогда:

- Оба корня больше данного числа l ($l < x_1 < x_2$) тогда и только тогда, когда $D > 0, af(l) > 0$ и $x_0 > l$;
- Оба корня меньше данного числа m ($x_1 < x_2 < m$) тогда и только тогда, когда $D > 0, af(m) > 0$ и $x_0 < m$;
- Оба корня принадлежат данному интервалу $(l; m)$ ($l < x_1 < x_2 < m$) тогда и только тогда, когда $D > 0, af(l) > 0, af(m) > 0$ и $l < x_0 < m$;
- Только меньший корень принадлежит данному интервалу $(l; m)$ ($l < x_1 < m < x_2$) тогда и только тогда, когда $af(l) > 0$ и $af(m) < 0$;
- Только больший корень принадлежит данному интервалу $(l; m)$ ($x_1 < l < x_2 < m$) тогда и только тогда, когда $af(l) < 0$ и $af(m) > 0$;
- Один из корней меньше данного числа l , а другой корень больше данного числа m ($x_1 < l < m < x_2$) тогда и только тогда, когда $af(l) < 0$ и $af(m) < 0$;
- Один из корней меньше данного числа l , а другой корень больше этого числа ($x_1 < l < x_2$) тогда и только тогда, когда $af(l) < 0$.

Задачи (нечётные на занятии, чётные самостоятельно)

1. Физтех-2017, билет 1

Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2 , его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2 , его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

Ответ: уменьшится на $\frac{3}{2}$.

2. Физтех-2017, билет 7

Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\frac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

Ответ: увеличится на $\frac{45}{2}$.

3. Физтех-2018, билет 2

Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $2(g(x))^2 - f(x)$, если наименьшее значение функции $2(f(x))^2 - g(x)$ равно 72.

Ответ: $-\frac{15}{4}$.

4. Физтех-2018, билет 4

Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 - 3f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 - 3g(x)$ равно 112.

Ответ: -10 .

5. Физтех-2016, билет 9

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x + 2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{19}{4}; \frac{17}{8}\right)$.

6. *Физтех-2016, билет 12*

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{3x - y} + y = 6, \\ 9x^2 + 3x - y - y^2 = 36. \end{cases}$$

Ответ: $(2; -3), (6; -18)$.7. *Физтех-2016, билет 22*Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$$

Ответ: $\left(3; \frac{1}{3}\right), \left(\sqrt[4]{66}; \frac{1}{\sqrt[4]{66}}\right)$.8. *Физтех-2016, билет 24*Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 3y - \sqrt{\frac{y}{x}} - 6\sqrt{xy} + 2 = 0, \\ x^2 + 81x^2y^4 = 2y^2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt[4]{31}}{12}, \frac{\sqrt[4]{31}}{3}\right)$.9. *Физтех-2014, билет 5*

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 + 3xy + 3y^2 = 16, \\ x^3 - x^2 + xy + 2y^2 = 8. \end{cases}$$

Ответ: $(2; -2), (-1; -2), (-4 - 2\sqrt{6}; -8 - 4\sqrt{6}), (-4 + 2\sqrt{6}; -8 + 4\sqrt{6})$.10. *Физтех-2014, билет 8*

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 + x^2 - xy = 1, \\ 2y^3 + x^2 + xy - 2y^2 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 1), (-2; -1), \left(-1 - \sqrt{5}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right), \left(-1 + \sqrt{5}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

11. *Физтех-2019, билет 5*

Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$,
 $f_3(x) = 3x^2 + (3 - 2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6 - a)x + 2 + 2b$. Пусть разности
их корней равны соответственно A , B , C и D , и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите
отношение $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$. Значения A , B , C , D , a , b не заданы.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

12. *Физтех-2019, билет 8*

Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 + 2x + a$, $f_2(x) = x^2 + bx - 1$,
 $f_3(x) = 2x^2 + (6 - b)x + 3a + 1$ и $f_4(x) = 2x^2 + (3b - 2)x - a - 3$. Пусть разности
их корней равны соответственно A , B , C и D , и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите
отношение $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$. Значения A , B , C , D , a , b не заданы.

Ответ: 2.