

## Задание 19 (теория чисел)

1. Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка  $[13; 70]$ . Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.
  - а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?
  - б) Может ли Петин результат быть ровно в 7 раз больше Васиного?
  - в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?
2. Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 11, а сумма которых больше 110, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 110, но больше:
  - а) 99;
  - б) 101;
  - в) 100.
3. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.
  - а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?
  - б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 тысяч рублей, а остальное поделить поровну на 80 сотрудников?
  - в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?
4. Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.
  - а) Можно ли купить 30 карандашей?
  - б) Можно ли купить 33 карандаша?
  - в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

5. Каждое из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{450}$  равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{450},$$

$$S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{450}^2,$$

$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{450}^3,$$

$$S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{450}^4.$$

Известно, что  $S_1 = 739$ .

- а) Найдите  $S_4$ , если ещё известно, что  $S_2 = 1779, S_3 = 5611$ .
- б) Может ли  $S_4 = 6547$ ?
- в) Пусть  $S_4 = 6435$ . Найдите все значения, которые может принимать  $S_2$ .
6. Даны  $n$  различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ( $n \geq 3$ ).
- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?
- б) Каково наибольшее значение  $n$ , если сумма всех данных чисел меньше 500?
- в) Найдите все возможные значения  $n$ , если сумма всех данных чисел равна 57.
7. В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.
- а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
- б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
- в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?
8. Коля умножил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число и получил произведение, равное  $m$ . Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное  $n$ .
- а) Может ли модуль разности чисел  $m$  и  $n$  равняться 6?
- б) Может ли модуль разности чисел  $m$  и  $n$  равняться 13?
- в) Какие значения может принимать модуль разности чисел  $m$  и  $n$ ?