Задание 16 (планиметрия)

1. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

   а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

   б) Найдите длину стороны B_1C_1 и радиус данной окружности, если $\angle A = 150^\circ$, $BC = 5\sqrt{5}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

2. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

   а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

   б) Найдите MK, если $AB = 5$, $AC = 8$.

3. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

   а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

   б) Найдите угол OHI, если $\angle ABC = 40^\circ$.

4. В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

   а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

   б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

5. Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

   а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

   б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=9$

6. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

   а) Докажите, что $AM = DM$.

б) Найдите угол BAD, если угол ADC равен $70°$, а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC.

7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

   а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

   б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

8. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

   а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

   б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.

9. Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

   а) Докажите, что $CO = KO$.

   б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет $\dfrac{9}{100}$ площади трапеции $ABCD$.

10. Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 1 : 4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ острый.

    а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.

    б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

11. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

    а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

    б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.