

Тригонометрия — 1

Преобразования

Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$6 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0.$$

Множество значений

Решите уравнение $2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos 24x \cos x + 2 \cos 5x - 6$.

Задачи (нечётные на занятии, чётные самостоятельно)

1. *Физтех-2019, билет 14*

$$\frac{\sin 3x}{(2 \cos 2x + 1) \sin 2y} = \frac{1}{5} + \cos^2(x - 2y) \text{ и } \frac{\cos 3x}{(1 - 2 \cos 2x) \cos 2y} = \frac{4}{5} + \sin^2(x - 2y).$$

Найдите все возможные значения выражения $\cos(x - 6y)$, если известно, что их не менее двух.

Ответ: 1 или $-\frac{3}{5}$

2. *Физтех-2019, билет 15*

$$\frac{\cos 3x}{(2 \cos 2x - 1) \cos y} = \frac{2}{3} + \cos^2(x - y) \text{ и } \frac{\sin 3x}{(2 \cos 2x + 1) \sin y} = -\frac{1}{3} - \sin^2(x - y).$$

Найдите все возможные значения выражения $\cos(x - 3y)$, если известно, что их не менее двух.

Ответ: -1 или $-\frac{1}{3}$

3. *Физтех-2018, билет 04*

Числа x и y таковы, что $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4$ и $3 \sin(2x + 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

Ответ: $\frac{7}{6}$

4. *Физтех-2018, билет 03*

Числа x и y таковы, что $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = 2$ и $5 \sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Ответ: $-\frac{6}{5}$

5. *Физтех-2017, билет 02*

Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos \frac{1}{9}$, а числа $5 + \cos x, 5 + \cos y, 5 + \cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.

Ответ: $-\frac{1}{9}$

6. *Физтех–2017, билет 03*

Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos \frac{-1}{5}$, а числа $2 + \sin x, 2 + \sin y, 2 + \sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

Ответ: $-\frac{1}{5}$

7. *Физтех–2016, билет 09*

Решите уравнение $(\cos x - 3 \cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x$.

Ответ: $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

8. *Физтех–2016, билет 10*

Решите уравнение $(\cos 2x - 2 \cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9. *Физтех–2015, билет 12*

Решите уравнение $\frac{1}{2} \left| \cos 2x - \frac{1}{2} \right| = \cos^2 3x + \cos x \cos 3x$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

10. *Физтех–2015, билет 13*

Решите уравнение $\frac{1}{2} \left| \cos 2x + \frac{1}{2} \right| = \sin^2 x + \sin x \sin 5x$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Дополнительные задачи

Преобразования

Найдите ближайший к $\frac{13}{4}\pi$ корень уравнения

$$\sin x \cos 2x + \sin x + \frac{10}{11} \sin 2x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{30}{44}.$$

Ответ: $x = 3\pi + \arccos(10/11)$

Множество значений

Решите уравнение

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5\pi^2}{4} = \sqrt{2 - |y|} \cdot (5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}).$$

Ответ: $x = 1, y = \pm 2$