

Рациональные и иррациональные системы и уравнения

Упражнения

1. Решите неравенство: $\sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{5x^2 - 1 - 4x - x^3}$
2. Решите уравнение: $(2y + 1)(1 + \sqrt{4y^2 + 4y + 8}) + y(1 + \sqrt{y^2 + 7}) = 0$
3. Решите уравнение: $(x^4 - 8x^2 + 18)^2 + (x^2 + 4x + 7)^2 = 13$
4. Найдите количество общих точек графиков функций $f(x) = x^3 + 6x$ и $g(x) = 12x^2 + 1$
5. Решите уравнение: $\sqrt[3]{15x + 1 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 4$
6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x^2 + 14xy + 10y^2 = 17, \\ 4x^2 + 10xy + 6y^2 = 8. \end{cases}$$

Задачи

1. [Физтех-2016. № 3] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x + 2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8}{21}; \frac{7}{61}\right)$$

2. [Физтех-2010. № 2] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{25 - y^2} = 7, \\ \sqrt{25 - y^2} - \sqrt{25 - x^2} = \frac{1}{7}(x^2 - 2y^2 + 2y + 3). \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}, \frac{1}{2}\sqrt{7}\right); \left(-1, -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}\right)$$

3. [Физтех-2014. № 3] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 2x - 4y + 3, \\ \sqrt{3x - 6y} = 2 - xy. \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{1} - \frac{7}{2}; \frac{7}{1} - \frac{7}{1}\right)$$

4. [Физтех-2014. № 6] Найдите все значения переменной x , при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 4 \text{ и } g(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{16 + 6x - x^2}} + \frac{\sqrt{16 + 6x - x^2}}{2x - 1}$$

определены, причем значение меньшего из выражений не превосходит 2 (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

$$\left\{\frac{8}{21}; \frac{7}{61}\right\} \cap \left(\frac{7}{1}; \frac{7}{2}\right) \cap \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{2}\right) \ni x$$

5. [Физтех-2013. № 2] Решите неравенство: $\frac{1}{\sqrt{|x+1|-2}} \leq \frac{1}{9+x}$

$$[7-; 6-) \ni x$$

6. [Физтех-2012. № 2] Решите неравенство: $\frac{x\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{x^2-4x+5}} \leq 1.$

$$(\infty+; 2) \cap (2; 5-] \ni x$$

7. [Физтех-2012. № 7] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4y^2 - 15xy + 14x^2 + 12y - 24x = 0, \\ \sqrt{x(12-7x+4y)+36} + \sqrt{x^2+8x+32} = 6. \end{cases}$$

$$[8-; 7-), (7-; 2-)$$

8. [Физтех-2001. № 1] Решите уравнение: $\sqrt{2x^2-8x+49} - \sqrt{x^2-4x+21} = 4.$

$$0 \leq x; 9- = x$$

9. [Физтех-2006. № 3] Решите систему:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2}(2+x) = 4y - 3x, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2. \end{cases}$$

$$(6; 9), (\frac{91}{91}; \frac{91}{8}-)$$

10. [Физтех-2008. № 5] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+12x+36} + \sqrt{x^2+y^2-16y+64} = 10, \\ 5y^2 - 8x^2 = 8. \end{cases}$$

$$[7; 3-)$$

11. [Физтех - 2008. № 4] Решите систему:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 5x - 9y + 4 = 0, \\ x^2 - y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

$$(2; 3), (\frac{8}{11}; \frac{8}{12}-), (\frac{8}{2}; \frac{8}{2}-)$$

12. [Физтех - 2015. № 4] Решите систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 0. \end{cases}$$

$$(\frac{9}{1} \wedge \mp; \frac{9}{3} \wedge \mp)$$

13. [Физтех-2006. № 2] Решите неравенство: $\frac{\sqrt{4x^3-12x+8}}{x+1} \leq \sqrt{4x+7}$

$$(\infty+; 1 - \frac{91}{4}) \cap (1 - \frac{7}{2} -] \ni x$$