Линейные диофантовы уравнения и КТО

1. Сколько существует пар $(s,t)\in\mathbb{Z}^2$ таких, что $5s+9t=7$ и $|2s-3t|<100$?

2. * Решите уравнение $\sin^2\left(4z+\dfrac{3\pi}{5}\right)+\cos^2\left(5z-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

   Сколько решений этого уравнения принадлежат промежутку $[0,1000\pi)$?

3. При каких $a,b\in\mathbb{Z}$ система $\begin{cases}ax+2y=1,\\ bx+3y=1,\end{cases}$ имеет решение $x,y\in\mathbb{Z}$?

4. Докажите, что уравнение $ax+by=c$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда уравнение $ax+by=c-5a+3b$ имеет решение в целых числах.

5. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $2x+3y+5z=11$.

6. * Докажите, что если $(a,b,c)=1$, то уравнение $ax+by+cz=1$ разрешимо в целых числах x,y,z.

7. * Пусть a, b, c — такие целые неотрицательные числа, что $28a+30b+31c=365$. Докажите, что $a+b+c=12$.

8. * Сколько целочисленных решений уравнения $60^\alpha\cdot\left(\dfrac{500}{3}\right)^\beta\cdot 360^\gamma=12960$ удовлетворяет условию $|\alpha+\beta+\gamma|<71$?

9. Решите систему сравнений $\begin{cases}2n\equiv_3 1,\\ 7n\equiv_{11} 5.\end{cases}$

10. На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?

11. * Докажите, что, какие бы ни были различные простые p_1, p_2, ..., p_n и натуральные t_1, t_2, ..., t_n, найдутся n подряд идущих натуральных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ таких, что
$$a_1 \vdots p_1^{t_1},\quad a_2 \vdots p_2^{t_2},\quad \ldots,\quad a_n \vdots p_n^{t_n}$$

12. * Докажите, что натуральные m, для которых $m^m+1 \vdots 30$, образуют арифметическую прогрессию, и найдите её.

Линейные диофантовы уравнения и КТО

1. Сколько существует пар $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$ таких, что $5s + 9t = 7$ и $|2s - 3t| < 100$?
2. * Решите уравнение $\sin^2\left(4z + \dfrac{3\pi}{5}\right) + \cos^2\left(5z - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

   Сколько решений этого уравнения принадлежат промежутку $[0, 1000\pi)$?
3. При каких $a, b \in \mathbb{Z}$ система $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ bx + 3y = 1, \end{cases}$ имеет решение $x, y \in \mathbb{Z}$?
4. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда уравнение $ax + by = c - 5a + 3b$ имеет решение в целых числах.
5. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.
6. * Докажите, что если $(a, b, c) = 1$, то уравнение $ax + by + cz = 1$ разрешимо в целых числах x, y, z.
7. * Пусть a, b, c — такие целые неотрицательные числа, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.
8. * Сколько целочисленных решений уравнения $60^\alpha \cdot \left(\dfrac{500}{3}\right)^\beta \cdot 360^\gamma = 12960$ удовлетворяет условию $|\alpha + \beta + \gamma| < 71$?
9. Решите систему сравнений $\begin{cases} 2n \equiv_3 1, \\ 7n \equiv_{11} 5. \end{cases}$
10. На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?
11. * Докажите, что, какие бы ни были различные простые $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и натуральные $t_1, t_2, \ldots, t_n$, найдутся n подряд идущих натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что
$$a_1 \,\vdots\, p_1^{t_1}, \quad a_2 \,\vdots\, p_2^{t_2}, \quad \ldots, \quad a_n \,\vdots\, p_n^{t_n}$$
12. * Докажите, что натуральные m, для которых $m^m + 1 \,\vdots\, 30$, образуют арифметическую прогрессию, и найдите её.