Многочлены с целыми коэффициентами

1. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

2. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. *(ММО, 2005, 10 кл, 2/6.)*

3. Докажите, что $\cos 20^\circ$ — иррациональное число.

   (Подсказка: поможет формула $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$*.)*

4. Докажите, что $x^7 - 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 25x^2 + 30x - 35$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. Пусть $p \in \mathbb{P}$, $b \perp p$. Докажите, что если у многочлена $x^n + px + bp^2$ нет целых корней, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

6. * Известно, что $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 7. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 7.

7. * У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок может быть различен). Докажите, что разность $P(2019) - Q(2019)$ кратна 1009.

8. * Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон? *(ТГ, 2010, баз, 10-11.)*

9. * Докажите, что если $p \in \mathbb{P}$, то многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим.

   (Подсказка: поможет замена $x = t + 1$*.)*

10. * Докажите, что многочлен $x^4 + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$, но приводим по модулю любого $p \in \mathbb{P}$.

11. * Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные $\in \mathbb{Z}$, то многочлен $(x - a_1)\ldots(x - a_n) - 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

12. * **Целозначные многочлены.**

    Многочлен $P(x)$ таков, что $\forall\ x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ число $P(x)$ целое. Докажите, что $P(x) = d_0 + d_1 C_x^1 + d_2 C_x^2 + \ldots + d_n C_x^n$, где $C_x^k = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$ и $d_0, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}$.

Многочлены с целыми коэффициентами

1. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

2. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс. *(ММО, 2005, 10 кл, 2/6.)*

3. Докажите, что $\cos 20^\circ$ — иррациональное число.

   (Подсказка: поможет формула $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$*.)*

4. Докажите, что $x^7 - 5x^6 + 10x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 25x^2 + 30x - 35$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. Пусть $p \in \mathbb{P}$, $b \perp p$. Докажите, что если у многочлена $x^n + px + bp^2$ нет целых корней, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

6. * Известно, что $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — целые числа, при любом целом x делится на 7. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 7.

7. * У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок может быть различен). Докажите, что разность $P(2019) - Q(2019)$ кратна 1009.

8. * Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон? *(ТГ, 2010, баз, 10-11.)*

9. * Докажите, что если $p \in \mathbb{P}$, то многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим.

   (Подсказка: поможет замена $x = t + 1$*.)*

10. * Докажите, что многочлен $x^4 + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$, но приводим по модулю любого $p \in \mathbb{P}$.

11. * Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные $\in \mathbb{Z}$, то многочлен $(x-a_1)\ldots(x-a_n)-1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

12. * **Целозначные многочлены.**

    Многочлен $P(x)$ таков, что $\forall\ x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ число $P(x)$ целое. Докажите, что $P(x) = d_0 + d_1 C_x^1 + d_2 C_x^2 + \ldots + d_n C_x^n$, где $C_x^k = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$ и $d_0, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}$.