Распределение $\{n\alpha\}$ $(n \in \mathbb{N})$

1. Действительное число γ таково, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо...
   а) ... $\left\lfloor \frac{7}{9} + n\gamma \right\rfloor = \lfloor n\gamma \rfloor$.
   б) ... $\left\{ \frac{7}{9} + n\gamma \right\} = \frac{7}{9} + \{n\gamma\}$.
   Докажите, что $\gamma \in \mathbb{Z}$.

2. На координатной плоскости в начале координат сидит слепой охотник, а в остальных точках с целыми координатами — круглые зайцы радиуса $r > 0$. Охотник палит наугад, пуля летит по прямой бесконечно далеко. Докажите, что она обязательно попадёт в какого-нибудь зайца.

3. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sharp\left\{m \in \mathbb{N} :\ m \le n,\ \sin m \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}}{n}$.

4. Докажите, что число 2^n может начинаться с любой комбинации цифр, первая из которых отлична от нуля.

5. Как часто степень тройки начинается с цифры семь?
   Иными словами, вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sharp\{m \in \mathbb{N} :\ m \le n,\ 3^m = 7...\}}{n}$.

6. * Прямоугольник $m \times k$ разбит линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ.

7. * Разобъём промежуток $[0;1)$ на n равных промежутков $\left[0; \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right), ..., \left[\frac{n-1}{n}; 1\right)$ и рассмотрим числа $\{k\alpha\}$ при $k \in \{0, 1, ..., n\}$.
   а) Докажите, что какие-нибудь два числа $\{k_1\alpha\}$ и $\{k_2\alpha\}$ окажутся на одном промежутке.
   б) Докажите, что $\exists\ k \in \{1, ..., n\}$ такое, что $\{k\alpha\} < \frac{1}{n}$ либо $\{-k\alpha\} < \frac{1}{n}$.
   в) Докажите теорему Дирихле.

8. * **Многомерная теорема Кронекера.**
   Докажите, что если $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ — попарно несоизмеримые иррациональные числа, то $\forall$ интервалов $I_1, I_2, ..., I_k \subset [0;1)$ $\ \exists\ n \in \mathbb{N}$ такое, что $\{n\alpha_1\} \in I_1$, $\{n\alpha_2\} \in I_2$, ..., $\{n\alpha_k\} \in I_k$.

Распределение $\{n\alpha\}$ $(n \in \mathbb{N})$

1. Действительное число γ таково, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо...
   а) ... $\left\lfloor \frac{7}{9} + n\gamma \right\rfloor = \lfloor n\gamma \rfloor$.
   б) ... $\left\{ \frac{7}{9} + n\gamma \right\} = \frac{7}{9} + \{n\gamma\}$.
   Докажите, что $\gamma \in \mathbb{Z}$.
2. На координатной плоскости в начале координат сидит слепой охотник, а в остальных точках с целыми координатами — круглые зайцы радиуса $r > 0$. Охотник палит наугад, пуля летит по прямой бесконечно далеко. Докажите, что она обязательно попадёт в какого-нибудь зайца.
3. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sharp\left\{m \in \mathbb{N} : m \leq n, \sin m \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}}{n}$.
4. Докажите, что число 2^n может начинаться с любой комбинации цифр, первая из которых отлична от нуля.
5. Как часто степень тройки начинается с цифры семь?
   Иными словами, вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sharp\{m \in \mathbb{N} : m \leq n,\ 3^m = 7...\}}{n}$.
6. * Прямоугольник $m \times k$ разбит линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ.
7. * Разобъём промежуток $[0;1)$ на n равных промежутков $\left[0; \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right), \ldots, \left[\frac{n-1}{n}; 1\right)$ и рассмотрим числа $\{k\alpha\}$ при $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
   а) Докажите, что какие-нибудь два числа $\{k_1\alpha\}$ и $\{k_2\alpha\}$ окажутся на одном промежутке.
   б) Докажите, что $\exists\ k \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\{k\alpha\} < \frac{1}{n}$ либо $\{-k\alpha\} < \frac{1}{n}$.
   в) Докажите теорему Дирихле.
8. * **Многомерная теорема Кронекера.**
   Докажите, что если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — попарно несоизмеримые иррациональные числа, то $\forall$ интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_k \subset [0;1)$ $\exists\ n \in \mathbb{N}$ такое, что $\{n\alpha_1\} \in I_1$, $\{n\alpha_2\} \in I_2$, ..., $\{n\alpha_k\} \in I_k$.