Цепные дроби

1. Разложите в цепные дроби числа $\dfrac{147}{13}$ и $\dfrac{129}{111}$.

2. * Вычислите $[0;2,3,4,...,999,1000]+[0;1,1,3,4,...,999,1000]$.

3. **Самый длинный алгоритм Евклида.**

   а) Сколько неподобных слагаемых содержит $K_n(x_1,...,x_n)$?

   б) Пусть $P_n/Q_n=[1;\underbrace{1,\ldots,1}_{n}]$, $P_n\perp Q_n$. Чему равны P_n и Q_n?

4. Даны числа $a_0\in\mathbb{Z}$, $a_1\in\mathbb{N}$, $a_2\in\mathbb{N}$, ... Пусть $\begin{array}{ll} P_{-1}=1 & P_0=a_0 \\ Q_{-1}=0 & Q_0=1 \end{array}$ и $\forall k$ $\begin{array}{l} P_k=a_kP_{k-1}+P_{k-2} \\ Q_k=a_kQ_{k-1}+Q_{k-2} \end{array}$.

   а) Докажите, что $\dfrac{P_n}{Q_n}=[a_0;a_1,...,a_n]$.

   б) Докажите, что $P_kQ_{k-2}-P_{k-2}Q_k=(-1)^k a_k \quad (k\geq 2)$.

5. Пусть $\dfrac{p}{q}=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n]$, $p\perp q$. Докажите, что решением уравнения $px-qy=1$ служит либо пара (Q_{n-1},P_{n-1}), либо пара $(-Q_{n-1},-P_{n-1})$.

6. Вычислите следующие цепные дроби: а) $[1,\overline{2}]$; б) $[5;\overline{1,2,1,10}]$.

7. Разложите в цепную дробь число... а) ... $\sqrt{2}$; б) ... $\sqrt{3}$.

8. * Разложите в цепную дробь число $\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

9. * **Формат А4.**

   Найдите наименьшее $n\in\mathbb{N}$, для которого $\exists\ m\in\mathbb{N}$ такое, что $\sqrt{2}<\dfrac{m}{n}<\dfrac{297}{210}$.

10. * Докажите, что $K_n(x_1,...,x_n)=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{vmatrix}$.

11. * Пусть $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ и $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что справедливо хотя бы одно из неравенств
$$\left|\alpha-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{2Q_n^2} \qquad \text{и} \qquad \left|\alpha-\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right|<\frac{1}{2Q_{n+1}^2}\ .$$

Цепные дроби

1. Разложите в цепные дроби числа $\dfrac{147}{13}$ и $\dfrac{129}{111}$.
2. * Вычислите $[0; 2, 3, 4, ..., 999, 1000] + [0; 1, 1, 3, 4, ..., 999, 1000]$.
3. **Самый длинный алгоритм Евклида.**

   а) Сколько неподобных слагаемых содержит $K_n(x_1, ..., x_n)$?

   б) Пусть $P_n/Q_n = [1; \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}]$, $P_n \perp Q_n$. Чему равны P_n и Q_n?
4. Даны числа $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \in \mathbb{N}$, $a_2 \in \mathbb{N}$, ... Пусть $\begin{matrix} P_{-1} = 1 & P_0 = a_0 \\ Q_{-1} = 0 & Q_0 = 1 \end{matrix}$ и $\forall k$ $\begin{matrix} P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{matrix}$.

   а) Докажите, что $\dfrac{P_n}{Q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n]$.

   б) Докажите, что $P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k = (-1)^k a_k \quad (k \geq 2)$.
5. Пусть $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $p \perp q$. Докажите, что решением уравнения $px - qy = 1$ служит либо пара (Q_{n-1}, P_{n-1}), либо пара $(-Q_{n-1}, -P_{n-1})$.
6. Вычислите следующие цепные дроби: а) $[1, \overline{2}]$; б) $[5; \overline{1, 2, 1, 10}]$.
7. Разложите в цепную дробь число... а) ... $\sqrt{2}$; б) ... $\sqrt{3}$.
8. * Разложите в цепную дробь число $\dfrac{3 + \sqrt{7}}{2}$.
9. * **Формат А4.**

   Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, для которого $\exists\ m \in \mathbb{N}$ такое, что $\sqrt{2} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{297}{210}$.
10. * Докажите, что $K_n(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{vmatrix}$.
11. * Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что справедливо хотя бы одно из неравенств
$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{2Q_n^2} \qquad \text{и} \qquad \left|\alpha - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2Q_{n+1}^2}\ .$$