Разложение на простые множители

1. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

2. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ справедливо
$$(a,b) \cdot [a,b] = ab\,.$$

3. * Можно ли найти пять таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

4. На какую наибольшую степень тройки делится число $201 \cdot 202 \cdot \ldots \cdot 600$?

5. Сколько натуральных делителей у числа $2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$?

6. * *Совершенное число* – натуральное число, равное сумме всех своих натуральных делителей, кроме его самого. Докажите, что все чётные совершенные числа имеют вид
$$2^{k-1}\left(2^k - 1\right),$$
причём $2^k - 1 \in \mathbb{P}$.

   (До сих пор не известно, существуют ли нечётные совершенные числа.)

7. * Существует ли многочлен $P(n)$ с целыми коэффициентами, значение которого при любом натуральном n является простым числом?

8. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}]$ не выполняется единственность разложения на простые.

9. Разложите числа 2, 3, 5, 7 на неразложимые сомножители в $\mathbb{Z}[i]$.

Разложение на простые множители

1. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.
2. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ справедливо
$$(a,b) \cdot [a,b] = ab\ .$$
3. * Можно ли найти пять таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?
4. На какую наибольшую степень тройки делится число $201 \cdot 202 \cdot \ldots \cdot 600$?
5. Сколько натуральных делителей у числа $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$?
6. * *Совершенное число* – натуральное число, равное сумме всех своих натуральных делителей, кроме его самого. Докажите, что все чётные совершенные числа имеют вид
$$2^{k-1}\left(2^k - 1\right),$$
причём $2^k - 1 \in \mathbb{P}$.

   (До сих пор не известно, существуют ли нечётные совершенные числа.)
7. * Существует ли многочлен $P(n)$ с целыми коэффициентами, значение которого при любом натуральном n является простым числом?
8. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ не выполняется единственность разложения на простые.
9. Разложите числа 2, 3, 5, 7 на неразложимые сомножители в $\mathbb{Z}[i]$.