Нелинейные диофантовы уравнения

1. **Метод спуска**

   Решим в $\mathbb{Z}$ уравнение $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2abcd$.

   Исследование уравнения по модулю 4 показывает, что $a, b, c, d \,\vdots\, 2$.

   Замена $a = 2a_1,\ b = 2b_1,\ c = 2c_1,\ d = 2d_1$.

   Новое уравнение: $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 8a_1b_1c_1d_1$.

   Исследование уравнения по модулю 8 показывает, что $a_1, b_1, c_1, d_1 \,\vdots\, 2$.

   Замена $a_1 = 2a_2,\ b_1 = 2b_2,\ c_1 = 2c_2,\ d_1 = 2d_2$.

   Новое уравнение: $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 = 32a_2b_2c_2d_2$.

   Так будет продолжаться бесконечно. $\longleftarrow$ вот он — спуск!

   Вывод: единственное решение $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$.

2. **Метод оценок**

   Решим в $\mathbb{Z}$ уравнение $2uvw + 2v + 2w = 7vw$.

   Если $v = 0$, то $w = 0$, и наоборот. Тогда u любое.

   Если $vw \neq 0$, то разделим уравнение на vw.

   Новое уравнение: $2u + \dfrac{2}{w} + \dfrac{2}{v} = 7$. Следовательно, $\dfrac{2}{w} + \dfrac{2}{v}$ — нечётное целое число.

   Это возможно, только если $|v| \le 4$ или $|w| \le 4$. $\longleftarrow$ вот она — оценка!

   Разбирая случаи $v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, находим решения. $\longleftarrow$ главное — аккуратно

   Итого $(u, \{v, w\})$: $(u, \{0\})$; $(3, \{4\})$; $(4, \{-4\})$; $(3, \{3, 6\})$; $(4, \{-3, -6\})$; $(2, \{2, 1\})$; $(4, \{2, -1\})$; $(5, \{-2, -1\})$; $(3, \{-2, 1\})$. $\longleftarrow$ да, решений бывает много...

3. **Комбинированный метод**

   Решим в $\mathbb{Z}$ уравнение $2^x + 1 = 3^y$.

   Варианты $x < 0$ и $y < 0$ отметаем сразу (из-за факториальности $\mathbb{Z}$).

   Если $x < 2$, то $x = 1,\ y = 1$. $\longleftarrow$ это одно из решений

   Если $x \ge 2$, то $2^x \,\vdots\, 4$, тогда $3^y \equiv_4 1$, т.е. $y = 2z,\ z \in \mathbb{N}$. $\longleftarrow$ рассмотрели остатки...

   $2^x = (3^z - 1)(3^z + 1)$, откуда $3^z - 1 = 2^v$, $3^z + 1 = 2^w$. $\longleftarrow$ опять эта факториальность!

   $2^w - 2^v = 2$, откуда $w = 2,\ v = 1$. $\longleftarrow$ разности степеней двоек растут...

   Финал: $x = v + w = 3,\ y = 2$.

4. **Пифагоровы тройки: $a^2+b^2=c^2$, $a,b,c\in\mathbb{N}$.**

Все пифагоровы тройки описываются формулами

$a=d(m^2-k^2)$, $\quad b=d(2mk)$, $\quad c=d(m^2+k^2)$, $\quad$ где $d,m,k\in\mathbb{N}$

$\square$ Сразу сократим на $d=(a,b,c)$ и будем считать, что $a\perp b$, $b\perp c$, $c\perp a$.

Не умаляя общности предположим, что $b\,\vdots\,2$, $a\not\vdots\,2$, $c\not\vdots\,2$.

Сделаем естественное преобразование: $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{c-a}{2}\cdot\frac{c+a}{2}$.

$\frac{c-a}{2}\perp\frac{c+a}{2}$. (Иначе c (сумма этих дробей) и a (разность этих дробей) не $\perp$.)

$\frac{c-a}{2}=k^2$, $\frac{c+a}{2}=m^2$. $\blacksquare$

5. **Уравнение Пелля: $x^2-ay^2=1$, $a\in\mathbb{N}, a\neq\square$.**

Разложим на множители: $(x-y\sqrt{a})(x+y\sqrt{a})=1$.

Т.е. решения — это такие $z\in\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$, что $z\cdot\overline{z}=1$.

Пусть (x_1,y_1) — наименьшее натуральное решение.

Все решения имеют вид $(\pm x_k,\pm y_k)$, где $x_k+y_k\sqrt{a}=(x_1+y_1\sqrt{a})^k$, $k\in\mathbb{Z}$.

$\square$ $(x-y\sqrt{a})^k(x+y\sqrt{a})^k=1^k=1 \longleftarrow$ значит, все они — решения!

Обозначим $z_k=(x+y\sqrt{a})^k$. $\longleftarrow$ для удобства

Пусть $z=\widehat{x}+\widehat{y}\sqrt{a}$ — решение, причём $z_m<z<z_{m+1}$. $\longleftarrow$ доказываем от противного.

Тогда z/z_m — решение, причём $1<z/z_m<z_1$.

Здесь стоит заметить две вещи:

ПЕРВОЕ: $\frac{z}{z_m}=\frac{\widehat{x}+\widehat{y}\sqrt{a}}{(x_1+y_1\sqrt{a})^m}=(\widehat{x}+\widehat{y}\sqrt{a})(x_1-y_1\sqrt{a})^m\in\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$.

ВТОРОЕ: если решение $z/z_m=\widehat{x}'+\widehat{y}'\sqrt{a}>1$, то $\widehat{x}',\widehat{y}'\in\mathbb{N}$.

Противоречие с минимальностью z_1. $\blacksquare$

Уравнение Пелля имеет бесконечно много решений при любом $a\in\mathbb{N}$, $a\neq\square$.

$\square$ Это веселее. Мы докажем через гиперболы и лемму Минковского. $\blacksquare$