МАТЕМАТИКА
Распределение $\{n\alpha\}$ $(n \in \mathbb{N})$

Шарич Владимир Златкович

Высшая школа экономики

Национальный исследовательский университет

Факультет математики

2018/2019

Теорема Дирихле

Теорема Дирихле

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Теорема Дирихле

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},\ k \leq n$:

Теорема Дирихле

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},\ k \le n$:

$$\left|\alpha - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{nk}.$$

Теорема Дирихле

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},\ k \leq n$:

$$\left|\alpha - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{nk}.$$

$\square$ $\mathcal{I}$ $Q_1 < Q_2 < Q_3 < \ldots < Q_s < n \leq Q_{s+1} < \ldots$

Теорема Дирихле

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},\ k \leq n$:

$$\left|\alpha - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{nk}.$$

$\square$ $\mathcal{I}$ $Q_1 < Q_2 < Q_3 < \ldots < Q_s < n \leq Q_{s+1} < \ldots$

$\mathcal{II}$ $\left|\alpha - \dfrac{P_s}{Q_s}\right| < \dfrac{1}{Q_s Q_{s+1}} \leq \dfrac{1}{nQ_s}$ $\blacksquare$

Теорема Кронекера

Теорема Кронекера

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$

Теорема Кронекера

$\forall\alpha \in \mathbb{R}\ \forall\varepsilon > 0$

$\exists k \in \mathbb{N}$:

Теорема Кронекера

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$

$\exists k \in \mathbb{N}$:

$\{k\alpha\} < \varepsilon$

$\square$

Теорема Кронекера

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$

$\exists k \in \mathbb{N}$:

$\{k\alpha\} < \varepsilon$

$\square$ $\mathcal{I}$ $\{k\alpha\} < \varepsilon$

Теорема Кронекера

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$

$\exists k \in \mathbb{N}$:

$\{k\alpha\} < \varepsilon$

$\square\ \mathcal{I}\ \ \{k\alpha\} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}\quad |k\alpha - m| < \varepsilon$

Теорема Кронекера

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$

$\exists k \in \mathbb{N}$:

$\{k\alpha\} < \varepsilon$

$\square$ $\mathcal{I}$ $\{k\alpha\} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \quad |k\alpha - m| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\alpha - \frac{m}{k}\right| < \frac{\varepsilon}{k}$$

Теорема Кронекера

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0$

$\exists k \in \mathbb{N}$:

$\{k\alpha\} < \varepsilon$

$\square$ $\mathcal{I}$ $\{k\alpha\} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \quad |k\alpha - m| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\alpha - \frac{m}{k}\right| < \frac{\varepsilon}{k}$$

$\mathcal{II}$ Теорема Дирихле для $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ $\blacksquare$

Теорема Вейля

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{n : \{n\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$$

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{n : \{n\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$$

$\square$

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{n : \{n\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$$

$\square$ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

$\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{n : \{n\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$$

□ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

$\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

$\mathcal{III}$ $N_k(1)$ — количество посещений всего на k-ом круге

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{n : \{n\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$$

□ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

$\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

$\mathcal{III}$ $N_k(1)$ — количество посещений всего на k-ом круге

$\mathcal{IV}$ $\left\lfloor \frac{|I|}{\beta} \right\rfloor - 1 < N_k(I) < \left\lceil \frac{|I|}{\beta} \right\rceil + 1,$

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sharp\{n:\{n\alpha\}\in I\}}{n}=|I|$$

$\square$ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

$\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

$\mathcal{III}$ $N_k(1)$ — количество посещений всего на k-ом круге

$\mathcal{IV}$ $\left\lfloor\frac{|I|}{\beta}\right\rfloor-1<N_k(I)<\left\lceil\frac{|I|}{\beta}\right\rceil+1,\qquad \left\lfloor\frac{1}{\beta}\right\rfloor-1<N_k(1)<\left\lceil\frac{1}{\beta}\right\rceil+1$

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{n : \{n\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$$

$\square$ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

$\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

$\mathcal{III}$ $N_k(1)$ — количество посещений всего на k-ом круге

$\mathcal{IV}$ $\left\lfloor \frac{|I|}{\beta} \right\rfloor - 1 < N_k(I) < \left\lceil \frac{|I|}{\beta} \right\rceil + 1, \quad \left\lfloor \frac{1}{\beta} \right\rfloor - 1 < N_k(1) < \left\lceil \frac{1}{\beta} \right\rceil + 1$

$\mathcal{V}$ $\frac{|I| - 2\beta}{1 + 2\beta} < \frac{N_k(I)}{N_k(1)} < \frac{|I| + 2\beta}{1 - 2\beta}$

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{n : \{n\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$$

$\square$ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

$\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

$\mathcal{III}$ $N_k(1)$ — количество посещений всего на k-ом круге

$\mathcal{IV}$ $\left\lfloor \frac{|I|}{\beta} \right\rfloor - 1 < N_k(I) < \left\lceil \frac{|I|}{\beta} \right\rceil + 1, \quad \left\lfloor \frac{1}{\beta} \right\rfloor - 1 < N_k(1) < \left\lceil \frac{1}{\beta} \right\rceil + 1$

$\mathcal{V}$ $\frac{|I| - 2\beta}{1 + 2\beta} < \frac{N_k(I)}{N_k(1)} < \frac{|I| + 2\beta}{1 - 2\beta}$

$\mathcal{VI}$ $\exists N(\beta)\ \forall n > N$

$$\frac{|I| - 2\beta}{1 + 2\beta} < \frac{\left(\sum_{k=1}^{K-1} N_k(I)\right) + N'_K(I)}{\left(\sum_{k=1}^{K-1} N_k(1)\right) + N'_K(1)} < \frac{|I| + 2\beta}{1 - 2\beta}$$

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{n : \{n\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$$

$\square$ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

$\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

$\mathcal{III}$ $N_k(1)$ — количество посещений всего на k-ом круге

$\mathcal{IV}$ $\left\lfloor \frac{|I|}{\beta} \right\rfloor - 1 < N_k(I) < \left\lceil \frac{|I|}{\beta} \right\rceil + 1, \quad \left\lfloor \frac{1}{\beta} \right\rfloor - 1 < N_k(1) < \left\lceil \frac{1}{\beta} \right\rceil + 1$

$\mathcal{V}$ $\frac{|I| - 2\beta}{1 + 2\beta} < \frac{N_k(I)}{N_k(1)} < \frac{|I| + 2\beta}{1 - 2\beta}$

$\mathcal{VI}$ $\exists N(\beta)\ \forall n > N$

$$\frac{|I| - 2\beta}{1 + 2\beta} < \frac{\left(\sum_{k=1}^{K-1} N_k(I)\right) + N'_K(I)}{\left(\sum_{k=1}^{K-1} N_k(1)\right) + N'_K(1)} < \frac{|I| + 2\beta}{1 - 2\beta}$$

$\mathcal{VII}$ Для исходного кузнечика верны те же оценки

Теорема Вейля

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sharp\{n:\{n\alpha\}\in I\}}{n}=|I|$$

$\square$ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

$\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

$\mathcal{III}$ $N_k(1)$ — количество посещений всего на k-ом круге

$\mathcal{IV}$ $\left\lfloor\frac{|I|}{\beta}\right\rfloor-1<N_k(I)<\left\lceil\frac{|I|}{\beta}\right\rceil+1,\quad \left\lfloor\frac{1}{\beta}\right\rfloor-1<N_k(1)<\left\lceil\frac{1}{\beta}\right\rceil+1$

$\mathcal{V}$ $\frac{|I|-2\beta}{1+2\beta}<\frac{N_k(I)}{N_k(1)}<\frac{|I|+2\beta}{1-2\beta}$

$\mathcal{VI}$ $\exists N(\beta)\ \forall n>N$

$$\frac{|I|-2\beta}{1+2\beta}<\frac{\left(\sum_{k=1}^{K-1}N_k(I)\right)+N'_K(I)}{\left(\sum_{k=1}^{K-1}N_k(1)\right)+N'_K(1)}<\frac{|I|+2\beta}{1-2\beta}$$

$\mathcal{VII}$ Для исходного кузнечика верны те же оценки

$\mathcal{VIII}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\beta\quad \left(\frac{|I|-2\beta}{1+2\beta},\frac{|I|+2\beta}{1-2\beta}\right)\subset(|I|-\varepsilon,|I|+\varepsilon)$ $\blacksquare$

Кто все эти люди?

Кто все эти люди?

Кронекер

Кто все эти люди?

Кронекер Леопольд

Кто все эти люди?

Кронекер Леопольд (Германия, 1823–1891)

Кто все эти люди?

Кронекер Леопольд (Германия, 1823–1891)

Дирихле

Кто все эти люди?

Кронекер Леопольд (Германия, 1823–1891)

Дирихле Петер Густав Лежён

Кто все эти люди?

Кронекер Леопольд (Германия, 1823–1891)
Дирихле Петер Густав Лежён (Германия, 1805–1895)

Кто все эти люди?

Кронекер Леопольд (Германия, 1823–1891)
Дирихле Петер Густав Лежён (Германия, 1805–1895)
Вейль

Кто все эти люди?

Кронекер Леопольд (Германия, 1823–1891)
Дирихле Петер Густав Лежён (Германия, 1805–1895)
Вейль Герман Клаус Гуго

Кто все эти люди?

Кронекер Леопольд (Германия, 1823–1891)
Дирихле Петер Густав Лежён (Германия, 1805–1895)
Вейль Герман Клаус Гуго (Германия, 1885–1955)