Распределение $\{n\alpha\}$ $(n \in \mathbb{N})$

1. **Теорема Дирихле**

   $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},\ k \le n\colon \quad \left|\alpha - \dfrac{m}{k}\right| < \dfrac{1}{nk}.$

   $\square$ $\mathcal{I}$ $Q_1 < Q_2 < Q_3 < \ldots < Q_s < n \le Q_{s+1} < \ldots$

   $\mathcal{II}$ $\left|\alpha - \dfrac{P_s}{Q_s}\right| < \dfrac{1}{Q_s Q_{s+1}} \le \dfrac{1}{nQ_s}$ $\blacksquare$

2. **Теорема Кронекера**

   $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall I \subset [0;1) \quad \exists m \in \mathbb{N}\colon \quad \{m\alpha\} \in I$

   $\square$ Лемма: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}\colon \left[\begin{array}{l} \{k\alpha\} < \varepsilon \\ 1 - \{k\alpha\} < \varepsilon \end{array}\right.$

   $\square\square \left[\begin{array}{l} \{k\alpha\} < \varepsilon \\ 1 - \{k\alpha\} < \varepsilon \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists m \in \mathbb{Z} \\ |k\alpha - m| < \varepsilon \end{array} \Leftrightarrow \left|\alpha - \dfrac{m}{k}\right| < \dfrac{\varepsilon}{k}$

   Теорема Дирихле для $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ $\blacksquare\blacksquare$

   k шагов = сдвиг $< \varepsilon$; положим $\varepsilon < |I|$ $\blacksquare$

3. **Теорема Вейля**

   $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sharp\{m \le n : \{m\alpha\} \in I\}}{n} = |I|$

   $\square$ $\mathcal{I}$ шизофрения у кузнечика: шаг $\beta << |I|$

   $\mathcal{II}$ $N_k(I)$ — количество посещений I на k-ом круге

   $\mathcal{III}$ $N_k(1)$ — количество посещений всего на k-ом круге

   $\mathcal{IV}$ $\dfrac{|I|}{\beta} - 1 < N_k(I) < \dfrac{|I|}{\beta} + 1, \quad \dfrac{1}{\beta} - 1 < N_k(1) < \dfrac{1}{\beta} + 1$

   $\mathcal{V}$ $\dfrac{|I| - \beta}{1 + \beta} < \dfrac{N_k(I)}{N_k(1)} < \dfrac{|I| + \beta}{1 - \beta}$

   $\mathcal{VI}$ $\forall n > N(\beta) \quad \dfrac{|I| - 2\beta}{1 + 2\beta} < \dfrac{\sum\limits_{k<K} N_k(I) + N'_K(I)}{\sum\limits_{k<K} N_k(1) + N'_K(1)} < \dfrac{|I| + 2\beta}{1 - 2\beta}$

   $\mathcal{VII}$ Для исходного кузнечика верны те же оценки

   $\mathcal{VIII}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \beta \quad \left(\dfrac{|I| - 2\beta}{1 + 2\beta}, \dfrac{|I| + 2\beta}{1 - 2\beta}\right) \subset (|I| - \varepsilon, |I| + \varepsilon)$ $\blacksquare$