МАТЕМАТИКА
Целочисленная решётка

Шарич Владимир Златкович

Высшая школа экономики
Национальный исследовательский университет

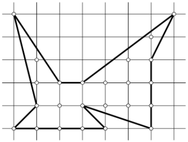
Факультет математики

2018/2019

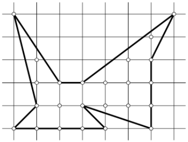
Формула Пика:

Формула Пика: $S = N_{\text{строго внутри}} + \frac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1.$

Формула Пика: $S = N_{\text{строго внутри}} + \dfrac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1.$

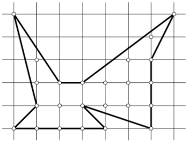


Формула Пика: $S = N_{\text{строго внутри}} + \dfrac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1.$

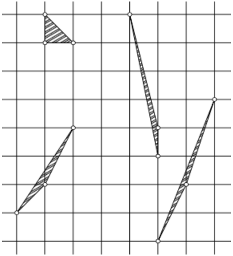


Примитивные треугольники: минимальные по включению треугольники с вершинами в узлах решётки.

Формула Пика: $S = N_{\text{строго внутри}} + \dfrac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1.$



Примитивные треугольники: минимальные по включению треугольники с вершинами в узлах решётки.



Формула Пика:

Формула Пика: $S = N_{\text{строго внутри}} + \dfrac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1.$

Формула Пика: $S = N_{\text{строго внутри}} + \frac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1.$

□ Примитивные треугольники: минимальные по включению треугольники с вершинами в узлах решётки.

Формула Пика: $S = N_{\text{строго внутри}} + \frac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1.$

☐ Примитивные треугольники: минимальные по включению треугольники с вершинами в узлах решётки.

Площадь примитивного треугольника: равна $1/2$.

Формула Пика: $S = N_{\textit{строго внутри}} + \dfrac{N_{\textit{на границе}}}{2} - 1.$

$\square$ Примитивные треугольники: минимальные по включению треугольники с вершинами в узлах решётки.

Площадь примитивного треугольника: равна $1/2$.

Склейка многоугольников: пусть $\mathcal{M}$ разбит на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$; если для $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ справедлива формула Пика, то для $\mathcal{M}$ — тоже. $\blacksquare$

Теорема Блихфельда: любую фигуру площади больше $n \in \mathbb{N}$ можно сдвинуть так, чтобы она накрывала

Теорема Блихфельда: любую фигуру площади больше $n \in \mathbb{N}$ можно сдвинуть так, чтобы она накрывала хотя бы $n + 1$ узлов.

Теорема Блихфельда: любую фигуру площади больше $n \in \mathbb{N}$ можно сдвинуть так, чтобы она накрывала хотя бы $n+1$ узлов.

$\square$ Разрежем фигуру вдоль линий решётки и сложим квадратики в стопку. $\blacksquare$

Лемма Минковского:

то $\quad \exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \neq (0, 0)\colon (x, y) \in \Phi.$

Лемма Минковского:

то $\exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2, (x,y) \neq (0,0)$: $(x,y) \in \Phi$.

$\square$ Сжатие. $\Phi' = \mathcal{H}_{(0,0)}^{1/2}(\Phi)$.

Лемма Минковского:

то $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \neq (0, 0)\colon (x, y) \in \Phi$.

$\square$ Сжатие. $\Phi' = \mathcal{H}^{1/2}_{(0,0)}(\Phi)$.

Блихфельд. $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Phi'$:

$(0, 0) \neq (x', y') = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Лемма Минковского:

то $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \neq (0, 0)\colon (x, y) \in \Phi$.

$\square$ Сжатие. $\Phi' = \mathcal{H}^{1/2}_{(0,0)}(\Phi)$.

Блихфельд. $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Phi'$:

$(0, 0) \neq (x', y') = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Отражение. $(-x_2, -y_2) \in \Phi'$.

Лемма Минковского:

то $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \neq (0, 0)\colon (x, y) \in \Phi.$

$\square$ Сжатие. $\Phi' = \mathcal{H}^{1/2}_{(0,0)}(\Phi).$

Блихфельд. $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Phi'$:

$(0, 0) \neq (x', y') = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2.$

Отражение. $(-x_2, -y_2) \in \Phi'.$

Середина. $\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \in \Phi'.$

Лемма Минковского:

то $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \neq (0, 0)\colon (x, y) \in \Phi.$

$\square$ Сжатие. $\Phi' = \mathcal{H}^{1/2}_{(0,0)}(\Phi).$

Блихфельд. $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Phi'$:

$(0, 0) \neq (x', y') = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2.$

Отражение. $(-x_2, -y_2) \in \Phi'.$

Середина. $\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \in \Phi'.$

Раздутие. $(x', y') \in \Phi.$ $\blacksquare$

Лемма Минковского:

то $\exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2, (x,y) \neq (0,0)\colon (x,y) \in \Phi$.

$\square$ Сжатие. $\Phi' = \mathcal{H}^{1/2}_{(0,0)}(\Phi)$.

Блихфельд. $\exists (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \Phi'$:

$(0,0) \neq (x',y') = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Отражение. $(-x_2,-y_2) \in \Phi'$.

Середина. $\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \in \Phi'$.

Раздутие. $(x',y') \in \Phi$. $\blacksquare$

Обобщение на размерность n: $\cancel{[\Phi] > 4}$ $[\Phi] > 2^n$

Кто все эти люди?

Пик

Кто все эти люди?

Пик Георг Александр

Кто все эти люди?

Пик Георг Александр (Австрия, 1859–1942)

Блихфельд(т)

Кто все эти люди?

Пик Георг Александр (Австрия, 1859–1942)

Блихфельд(т) Ганс Фредерик

Кто все эти люди?

Пик Георг Александр (Австрия, 1859–1942)

Блихфельд(т) Ганс Фредерик (Америка, 1873–1945)

Минковски(й)

Кто все эти люди?

Пик Георг Александр (Австрия, 1859–1942)

Блихфельд(т) Ганс Фредерик (Америка, 1873–1945)

Минковски(й) Герман

Кто все эти люди?

Пик Георг Александр (Австрия, 1859–1942)

Блихфельд(т) Ганс Фредерик (Америка, 1873–1945)

Минковски(й) Герман (Германия, 1854–1909)

Теорема Ферма-Эйлера:

Теорема Ферма-Эйлера:

если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m, k \in \mathbb{Z}$: $p = m^2 + k^2$.

Теорема Ферма-Эйлера:
если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m, k \in \mathbb{Z}$: $p = m^2 + k^2$.

$\square$ Вильсон. $\exists z \in \mathbb{Z}$ такое, что $z^2 + 1 = cp$.

Теорема Ферма-Эйлера:
если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m, k \in \mathbb{Z}$: $p = m^2 + k^2$.

$\square$ Вильсон. $\exists z \in \mathbb{Z}$ такое, что $z^2 + 1 = cp$.
(Например, $z = \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$.)

Теорема Ферма-Эйлера:
если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m, k \in \mathbb{Z}$: $p = m^2 + k^2$.

□ Вильсон. $\exists z \in \mathbb{Z}$ такое, что $z^2 + 1 = cp$.
(Например, $z = \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$.)
Эллипс. $px^2 + 2zxy + cy^2 < t$ на координатной плоскости Oxy задаёт эллипс.

Теорема Ферма-Эйлера:
если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m, k \in \mathbb{Z}$: $p = m^2 + k^2$.

$\square$ Вильсон. $\exists z \in \mathbb{Z}$ такое, что $z^2 + 1 = cp$.
(Например, $z = \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$.)
Эллипс. $px^2 + 2zxy + cy^2 < t$ на координатной плоскости Oxy задаёт эллипс.
Площадь. Его площадь равна πt.

Теорема Ферма-Эйлера:
если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m, k \in \mathbb{Z}$: $p = m^2 + k^2$.

$\square$ Вильсон. $\exists z \in \mathbb{Z}$ такое, что $z^2 + 1 = cp$.
(Например, $z = \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$.)
Эллипс. $px^2 + 2zxy + cy^2 < t$ на координатной плоскости Oxy задаёт эллипс.
Площадь. Его площадь равна πt.
Минковский. Положим $\frac{4}{\pi} < t < 2$.

Теорема Ферма-Эйлера:
если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m, k \in \mathbb{Z}$: $p = m^2 + k^2$.

$\square$ Вильсон. $\exists z \in \mathbb{Z}$ такое, что $z^2 + 1 = cp$.
(Например, $z = \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$.)
Эллипс. $px^2 + 2zxy + cy^2 < t$ на координатной плоскости Oxy задаёт эллипс.
Площадь. Его площадь равна πt.
Минковский. Положим $\frac{4}{\pi} < t < 2$.
Здравый смысл. Уравнение $px^2 + 2zxy + cy^2 = 1$ имеет решение $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}$.

Теорема Ферма-Эйлера:

если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m, k \in \mathbb{Z}$: $p = m^2 + k^2$.

$\square$ Вильсон. $\exists z \in \mathbb{Z}$ такое, что $z^2 + 1 = cp$.
(Например, $z = \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$.)

Эллипс. $px^2 + 2zxy + cy^2 < t$ на координатной плоскости Oxy задаёт эллипс.

Площадь. Его площадь равна πt.

Минковский. Положим $\frac{4}{\pi} < t < 2$.

Здравый смысл. Уравнение $px^2 + 2zxy + cy^2 = 1$ имеет решение $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}$.

Трюк. $p = (p\hat{x} + z\hat{y})^2 + (\hat{y})^2$. $\blacksquare$