Целочисленная решётка

1. Формула Пика: $S = N_{\text{строго внутри}} + \dfrac{N_{\text{на границе}}}{2} - 1$.

   □ Примитивные треугольники: минимальные по включению треугольники с вершинами в узлах решётки.

   Площадь примитивного треугольника: равна $1/2$.

   Склейка многоугольников: пусть $\mathcal{M}$ разбит на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$; если для $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ справедлива формула Пика, то для $\mathcal{M}$ — тоже. ■

2. Теорема Блихфельда: любую фигуру площади больше $n \in \mathbb{N}$ можно сдвинуть так, чтобы она накрывала хотя бы $n+1$ узлов.

   □ Разрежем фигуру вдоль линий решётки и сложим квадратики в стопку. ■

3. Лемма Минковского:

   если $\begin{cases} \Phi = \operatorname{conv}(\Phi) \\ Z_{(0,0)}(\Phi) = \Phi \\ [\Phi] > 4 \end{cases}$, то $\exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2, (x,y) \neq (0,0)\colon (x,y) \in \Phi$.

   □ Сжатие. $\Phi' = \mathcal{H}^{1/2}_{(0,0)}(\Phi)$.

   Блихфельд. $\exists (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \Phi'\colon (0,0) \neq (x',y') = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$.

   Отражение. $(-x_2, -y_2) \in \Phi'$.

   Середина. $\left(\dfrac{x'}{2}, \dfrac{y'}{2}\right) = \left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}, \dfrac{y_1 - y_2}{2}\right) \in \Phi'$.

   Раздутие. $(x',y') \in \Phi$. ■

   Обобщение на размерность n: $\cancel{[\Phi] > 4}$ $[\Phi] > 2^n$

4. Теорема Ферма-Эйлера: если $\mathbb{P} \ni p \equiv_4 1$, то $\exists m,k \in \mathbb{Z}\colon p = m^2 + k^2$.

   □ Вильсон. $\exists z \in \mathbb{Z}$ такое, что $z^2 + 1 = cp$. (Например, $z = \left(\dfrac{p-1}{2}!\right)^2$.)

   Эллипс. $px^2 + 2zxy + cy^2 < t$ на координатной плоскости Oxy задаёт эллипс.

   Площадь. Его площадь равна πt.

   Минковский. Положим $\dfrac{4}{\pi} < t < 2$.

   Здравый смысл. Уравнение $px^2 + 2zxy + cy^2 = 1$ имеет решение $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}$.

   Трюк. $p = (p\hat{x} + z\hat{y})^2 + (\hat{y})^2$. ■