МАТЕМАТИКА

Цепные дроби

Шарич Владимир Златкович

Высшая школа экономики

Национальный исследовательский университет

Факультет математики

2018/2019

Цепная (непрерывная) дробь

Цепная (непрерывная) дробь

конечная:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Цепная (непрерывная) дробь

конечная:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n];$$

Цепная (непрерывная) дробь

конечная:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n];$$

бесконечная:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}$$

Цепная (непрерывная) дробь

конечная:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n];$$

бесконечная:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots].$$

Цепная (непрерывная) дробь

конечная:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n];$$

бесконечная:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots].$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — неполные частные цепной дроби.

Континуанты

Континуанты

$K_n(x_1, \ldots, x_n)$ — сумма всевозможных одночленов, получающихся из произведения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ вычёркиванием пар соседних переменных.

Континуанты

$K_n(x_1, \ldots, x_n)$ — сумма всевозможных одночленов, получающихся из произведения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ вычёркиванием пар соседних переменных.

$$K_k(x_1, \ldots, x_k) = x_1 K_{k-1}(x_2, \ldots, x_k) + K_{k-2}(x_3, \ldots, x_k)$$

Континуанты

$K_n(x_1, \ldots, x_n)$ — сумма всевозможных одночленов, получающихся из произведения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ вычёркиванием пар соседних переменных.

$$K_k(x_1, \ldots, x_k) = x_1 K_{k-1}(x_2, \ldots, x_k) + K_{k-2}(x_3, \ldots, x_k)$$

Следствие:

$$\begin{pmatrix} K_{1,\ldots,n} & K_{1,\ldots,n-1} \\ K_{2,\ldots,n} & K_{2,\ldots,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Континуанты

$K_n(x_1, \ldots, x_n)$ — сумма всевозможных одночленов, получающихся из произведения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ вычёркиванием пар соседних переменных.

$$K_k(x_1, \ldots, x_k) = x_1 K_{k-1}(x_2, \ldots, x_k) + K_{k-2}(x_3, \ldots, x_k)$$

Следствие:

$$\begin{pmatrix} K_{1,\ldots,n} & K_{1,\ldots,n-1} \\ K_{2,\ldots,n} & K_{2,\ldots,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Следствие:

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{K_{n+1}(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{K_n(a_1, \ldots, a_n)}$$

Значение цепной дроби

Подходящая дробь $\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

Значение цепной дроби

Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n$,

Значение цепной дроби

Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n, \qquad |P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k| = 1.$

Значение цепной дроби

Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n, \qquad |P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k| = 1.$

$\square$ $P_k = K_{k+1}(a_0, a_1, ..., a_k)$,

Значение цепной дроби

Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n, \qquad |P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k| = 1$.

$\square$ $P_k = K_{k+1}(a_0, a_1, ..., a_k)$, $Q_k = K_k(a_1, ..., a_k)$. $\blacksquare$

Значение цепной дроби

Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n, \qquad |P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k| = 1$.

$\square$ $P_k = K_{k+1}(a_0, a_1, ..., a_k)$, $Q_k = K_k(a_1, ..., a_k)$. $\blacksquare$

$\exists \ \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$

Значение цепной дроби

Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n, \qquad |P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k| = 1.$

☐ $P_k = K_{k+1}(a_0, a_1, ..., a_k)$, $Q_k = K_k(a_1, ..., a_k)$. ■

$\exists \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$

☐ Первое. $\dfrac{P_k}{Q_k} - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}}.$

Значение цепной дроби

Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

$Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n$, $\qquad |P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k| = 1$.

$\square$ $P_k = K_{k+1}(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, $Q_k = K_k(a_1, \ldots, a_k)$. $\blacksquare$

$\exists \ \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$

$\square$ Первое. $\dfrac{P_k}{Q_k} - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}}$.

Второе. $\dfrac{P_0}{Q_0} < \dfrac{P_2}{Q_2} < \dfrac{P_4}{Q_4} < \ldots < \dfrac{P_5}{Q_5} < \dfrac{P_3}{Q_3} < \dfrac{P_1}{Q_1}$. $\blacksquare$

Приближения иррациональных чисел

Приближения иррациональных чисел

Каковы размеры листа А4?

Приближения иррациональных чисел

Каковы размеры листа A4?

Почему приближение $\pi \approx \dfrac{22}{7}$ столь хорошее?

Приближения иррациональных чисел

Каковы размеры листа A4?

Почему приближение $\pi \approx \dfrac{22}{7}$ столь хорошее?

$$\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^2}$$