Цепные дроби

1. Цепная (непрерывная) дробь

   конечная: $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$ обозначается $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$;

   бесконечная: $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}},$$ обозначается $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$.

   Числа $a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — неполные частные цепной дроби.

2. Континуанты

   $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ — сумма всевозможных одночленов, получающихся из произведения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ вычёркиванием пар соседних переменных.

   $K_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = x_1 K_{k-1}(x_2, \ldots, x_k) + K_{k-2}(x_3, \ldots, x_k)$

   Следствие: $$\begin{pmatrix} K_n(x_1, \ldots, x_n) & K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ K_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) & K_{n-2}(x_2, \ldots, x_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Следствие: $$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{K_{n+1}(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{K_n(a_1, \ldots, a_n)}$$

3. Значение цепной дроби

   Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$, $P_k \perp Q_k$.

   $Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n$, $\qquad |P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k| = 1$.

   □ $P_k = K_{k+1}(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, $Q_k = K_k(a_1, \ldots, a_k)$. ■

   $\exists \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$

   □ Первое. $\dfrac{P_k}{Q_k} - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}}$. Второе. $\dfrac{P_0}{Q_0} < \dfrac{P_2}{Q_2} < \dfrac{P_4}{Q_4} < \ldots < \dfrac{P_5}{Q_5} < \dfrac{P_3}{Q_3} < \dfrac{P_1}{Q_1}$. ■

4. Приближения иррациональных чисел рациональными

   Каковы размеры листа A4? Почему приближение $\pi \approx \dfrac{22}{7}$ столь хорошее?

   $$\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^2}$$