Контрольная работа №1

Баллы:

Задачи без звёздочки стоят 1 балл каждая.

Задачи со звёздочкой стоят 2 балла каждая.

Количество баллов за контрольную равно $\min(\sum_k n_k; 10)$*, где* n_k *— количество набранных баллов за* k*-ю задачу.*

1. Каким может быть наибольший общий делитель чисел $12n+1$ и $5n-1$, если $n \in \mathbb{Z}$?
2. Разложите в произведение неразложимых элементов $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ число $11 + 7\mathrm{i}$.
3. Докажите, что $a^{17} - a$ делится на 510.
4. Вычислите $\left(\dfrac{5}{73}\right)$.
5. Вычислите значение цепной дроби $[2; \overline{3, 4}]$ (т.е. $[2; 3, 4, 3, 4, 3, 4, ...]$).
6. * **Шестиугольная решётка.**

   Найдите все обратимые элементы в кольце $\mathbb{Z}\left[\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right]$.
7. * **Первообразный корень.**

   Пусть $\varphi(m) = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа $\varphi(m)$ на простые сомножители, $(g, m) = 1$. В этом случае g — первообразный корень в $\mathbb{Z}_m$ тогда и только тогда, когда g не является решением ни одного из сравнений $g^{\frac{\varphi(m)}{p_k}} \equiv 1 \pmod m$ при $k = 1, \ldots, s$.
8. * **Когда вычет -2 квадратичен?**

   Докажите, что -2 является квадратичным вычетом по простому модулю p тогда и только тогда, когда $p = 8m + 1$ или $p = 8m + 3$.
9. * **Электрическая розетка.**

   Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, для которого $\exists\ m \in \mathbb{N}$ такое, что $\sqrt{3} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{220}{127}$.

Контрольная работа №1

Баллы:

Задачи без звёздочки стоят 1 балл каждая.

Задачи со звёздочкой стоят 2 балла каждая.

Количество баллов за контрольную равно $\min(\sum_k n_k; 10)$*, где* n_k *— количество набранных баллов за* k*-ю задачу.*

1. Каким может быть наибольший общий делитель чисел $12n+1$ и $5n-1$, если $n \in \mathbb{Z}$?
2. Разложите в произведение неразложимых элементов $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ число $11+7\mathrm{i}$.
3. Докажите, что $a^{17}-a$ делится на 510.
4. Вычислите $\left(\frac{5}{73}\right)$.
5. Вычислите значение цепной дроби $[2;\overline{3,4}]$ (т.е. $[2;3,4,3,4,3,4,...]$).
6. * **Шестиугольная решётка.**

   Найдите все обратимые элементы в кольце $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right]$.
7. * **Первообразный корень.**

   Пусть $\varphi(m) = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа $\varphi(m)$ на простые сомножители, $(g,m)=1$. В этом случае g — первообразный корень в $\mathbb{Z}_m$ тогда и только тогда, когда g не является решением ни одного из сравнений $g^{\frac{\varphi(m)}{p_k}} \equiv 1 \pmod m$ при $k=1,\ldots,s$.
8. * **Когда вычет -2 квадратичен?**

   Докажите, что -2 является квадратичным вычетом по простому модулю p тогда и только тогда, когда $p=8m+1$ или $p=8m+3$.
9. * **Электрическая розетка.**

   Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, для которого $\exists\ m \in \mathbb{N}$ такое, что $\sqrt{3} < \frac{m}{n} < \frac{220}{127}$.