Диофантовы уравнения (дополнительные задачи)

1. Докажите, что если числа n и m являются периодами некоторой последовательности, то и (m, n) является периодом этой последовательности.

2. Докажите **теорему Сильвестра**:

   Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Наибольшее c, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, имеет вид $c = ab - a - b$.

3. Докажите, что если $(a, b, c) = 1$, то уравнение $ax + by + cz = 1$ разрешимо в целых числах x, y, z.

4. Пусть a, b, c — такие целые неотрицательные числа, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

5. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в $\mathbb{Z}$:
   (a) $n^3 + 2 = 9k$; (b) $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$; (c) $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 15^{15}$.

6. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$.

7. При каких натуральных n число $n^4 + 4$ является простым?

8. Решите в $\mathbb{N}$ систему $\begin{cases} a^3 + 6ab + 1 = n^3 \\ b^3 + 6ab + 1 = m^3 \end{cases}$.

9. Рассмотрим для $k, n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{P}$ уравнение $2^k + 1 = p^{\,n}$.

   (a) Решите его при условии $n > 1$.

   (b) Докажите, что если $n = 1$, то $k = 2^m$.

10. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

11. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $2x + 5y = xy - 1$.

12. Сколько решений в $\mathbb{N}$ имеет уравнение $9x^2 - 25y^2 = 2^\alpha 3^\beta 7^\gamma$ в зависимости от натуральных параметров α, β, γ?

    Ответ.

    если α, β, γ — чётные, то

    если $\alpha + \beta + \gamma \vdots 4$, то $\dfrac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma + 1) - 1}{2}$

    если $\alpha + \beta + \gamma \vdots 4$, то $\dfrac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma + 1) - 1}{2} - 1$

    если среди α, β, γ есть нечётное, то

    в любом случае $\dfrac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma + 1)}{2}$

Диофантовы уравнения (дополнительные задачи)

1. Докажите, что если числа n и m являются периодами некоторой последовательности, то и (m, n) является периодом этой последовательности.

2. Докажите **теорему Сильвестра**:

   Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Наибольшее c, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, имеет вид $c = ab - a - b$.

3. Докажите, что если $(a, b, c) = 1$, то уравнение $ax + by + cz = 1$ разрешимо в целых числах x, y, z.

4. Пусть a, b, c — такие целые неотрицательные числа, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

5. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в $\mathbb{Z}$:
   (a) $n^3 + 2 = 9k$; (b) $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$; (c) $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 15^{15}$.

6. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$.

7. При каких натуральных n число $n^4 + 4$ является простым?

8. Решите в $\mathbb{N}$ систему $\begin{cases} a^3 + 6ab + 1 = n^3 \\ b^3 + 6ab + 1 = m^3 \end{cases}$.

9. Рассмотрим для $k, n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{P}$ уравнение $2^k + 1 = p^{\,n}$.

   (a) Решите его при условии $n > 1$.

   (b) Докажите, что если $n = 1$, то $k = 2^m$.

10. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

11. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $2x + 5y = xy - 1$.

12. Сколько решений в $\mathbb{N}$ имеет уравнение $9x^2 - 25y^2 = 2^\alpha 3^\beta 7^\gamma$ в зависимости от натуральных параметров α, β, γ?

    Ответ.

    если α, β, γ — чётные, то

    если $\alpha + \beta + \gamma \,\vdots\, 4$, то $\dfrac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma + 1) - 1}{2}$

    если $\alpha + \beta + \gamma \,\vdots\, 4$, то $\dfrac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma + 1) - 1}{2} - 1$

    если среди α, β, γ есть нечётное, то

    в любом случае $\dfrac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma + 1)}{2}$