СУЩЕСТВОВАНИЕ: Метод крайнего

Демонстрационная задача На плоскости дано n синих и n красных точек, причём никакие 3 из $2n$ точек не лежат на одной прямой. Докажите, что можно соединить отрезками красные точки с синими так, чтобы отрезки не имели общих точек, включая концы.

1. Какова наибольшая возможная площадь треугольника, все стороны которого не больше 1?
2. В узлах бесконечной треугольной решётки написаны натуральные числа так, что каждое равно среднему арифметическому шести соседних с ним чисел. Докажите, что найдётся такое C, что числа во всех узлах меньше C.
3. На плоскости расположено несколько точек. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не более 1. Докажите, что все точки лежат внутри некоторого треугольника площади 4.

СУЩЕСТВОВАНИЕ: Конструкции

Демонстрационная задача Дан граф. Докажите, что в его вершинах можно вписать натуральные числа так, чтобы числа в соседних вершинах не были взаимно просты, а числа в несоседних вершинах —- были взаимно просты.

1. Дан набор одинаковых правильных пятиугольников, при вершинах каждого из которых записаны натуральные числа от 1 до 5 по часовой стрелки. Пятиугольники можно поворачивать и переворачивать. Их сложили в стопку (вершина к вершине), и оказалось, что при всех пяти вершинах суммы чисел одинаковы. Сколько пятиугольников могло быть в этой стопке?
2. Можно ли все натуральные числа раскрасить в два цвета так, чтобы не было бесконечной арифметической прогрессии одного цвета?
3. Докажите, что найдутся такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение каждых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

СУЩЕСТВОВАНИЕ: Метод крайнего

Демонстрационная задача На плоскости дано n синих и n красных точек, причём никакие 3 из $2n$ точек не лежат на одной прямой. Докажите, что можно соединить отрезками красные точки с синими так, чтобы отрезки не имели общих точек, включая концы.

1. Какова наибольшая возможная площадь треугольника, все стороны которого не больше 1?
2. В узлах бесконечной треугольной решётки написаны натуральные числа так, что каждое равно среднему арифметическому шести соседних с ним чисел. Докажите, что найдётся такое C, что числа во всех узлах меньше C.
3. На плоскости расположено несколько точек. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не более 1. Докажите, что все точки лежат внутри некоторого треугольника площади 4.

СУЩЕСТВОВАНИЕ: Конструкции

Демонстрационная задача Дан граф. Докажите, что в его вершинах можно вписать натуральные числа так, чтобы числа в соседних вершинах не были взаимно просты, а числа в несоседних вершинах —- были взаимно просты.

1. Дан набор одинаковых правильных пятиугольников, при вершинах каждого из которых записаны натуральные числа от 1 до 5 по часовой стрелки. Пятиугольники можно поворачивать и переворачивать. Их сложили в стопку (вершина к вершине), и оказалось, что при всех пяти вершинах суммы чисел одинаковы. Сколько пятиугольников могло быть в этой стопке?
2. Можно ли все натуральные числа раскрасить в два цвета так, чтобы не было бесконечной арифметической прогрессии одного цвета?
3. Докажите, что найдутся такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение каждых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.