Сравнения по модулю

1. Известно, что $n > 3$, $n \not\vdots\, 2$, $n \not\vdots\, 3$. Какой остаток дает n^2 при делении на 24?

2. Найдите все m и $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие соотношению $m! + 12 = n^2$.

3. Сколько существует таких пар целых чисел $1 \le x \le 100$, $1 \le y \le 100$ таких, что $x^2 + y^2 \,\vdots\, 7$?

4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 6 остаток 5, т.е. простых чисел вида $6m + 5$.

! Числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если они дают одинаковые остатки при делении на m. Запись: $a \equiv_m b$ или $a \equiv b \pmod m$. Очевидно, что

$$a \equiv_m b \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} a = b + mk \ .$$

5. Докажите, что:

   (a) $ad \equiv bd \pmod m \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{\dfrac{m}{[d,\, m]}}$;

   (b) $\begin{cases} a \equiv b \mod m \\ a \equiv b \pmod n \end{cases} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[m,\, n]}$.

!! **Принцип взаимозаменяемости.**
Пусть выражение $F(x, y, ...)$ составлено из переменных $x, y, ...$ и целых чисел при помощи операций $+$, $-$, $\cdot$ (попросту говоря, F — многочлен с целыми коэффициентами). Тогда если

$$a \equiv_m b, \qquad c \equiv_m d, \qquad ...,$$

то

$$F(a, c, ...) \equiv_m F(b, d, ...) \ .$$

6. Докажите, что $1^{77} + 2^{77} + 3^{77} + ... + 1996^{77}$ делится на 1997.

7. Докажите, что для любого натурального n число $10^n + 18n - 1$ делится на 27.

8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов целых чисел.

9. Докажите, что $(2^n - 1)^n - 3 \,\vdots\, 2^n - 3$ при всяком натуральном n.

10. a, b и n – натуральные числа и n нечётно. Докажите, что если числитель и знаменатель дроби $\dfrac{a^n + b^n}{a + b}$ делятся на n, то и сама дробь делится на n.

Сравнения по модулю

1. Известно, что $n > 3$, $n \not\vdots\, 2$, $n \not\vdots\, 3$. Какой остаток дает n^2 при делении на 24?

2. Найдите все m и $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие соотношению $m! + 12 = n^2$.

3. Сколько существует таких пар целых чисел $1 \leq x \leq 100$, $1 \leq y \leq 100$ таких, что $x^2 + y^2 \vdots 7$?

4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 6 остаток 5, т.е. простых чисел вида $6m + 5$.

! Числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если они дают одинаковые остатки при делении на m. Запись: $a \equiv_m b$ или $a \equiv b \pmod{m}$. Очевидно, что

$$a \equiv_m b \Leftrightarrow a - b \vdots m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} a = b + mk \ .$$

5. Докажите, что:

   (a) $ad \equiv bd \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ \dfrac{m}{[d,\, m]})$;

   (b) $\begin{cases} a \equiv b \mod m \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[m,\, n]}$.

!! **Принцип взаимозаменяемости.**
Пусть выражение $F(x, y, ...)$ составлено из переменных $x, y, ...$ и целых чисел при помощи операций $+$, $-$, $\cdot$ (попросту говоря, F — многочлен с целыми коэффициентами). Тогда если

$$a \equiv_m b, \qquad c \equiv_m d, \qquad ...,$$

то

$$F(a, c, ...) \equiv_m F(b, d, ...) \ .$$

6. Докажите, что $1^{77} + 2^{77} + 3^{77} + ... + 1996^{77}$ делится на 1997.

7. Докажите, что для любого натурального n число $10^n + 18n - 1$ делится на 27.

8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов целых чисел.

9. Докажите, что $(2^n - 1)^n - 3 \vdots 2^n - 3$ при всяком натуральном n.

10. a, b и n – натуральные числа и n нечётно. Докажите, что если числитель и знаменатель дроби $\dfrac{a^n + b^n}{a + b}$ делятся на n, то и сама дробь делится на n.