Непрерывность

1. Матч между двумя футбольными командами закончился со счетом $8:5$. Докажите, что был момент, когда первая команда забила столько же мячей, сколько второй оставалось забить.

2. Выйдя на маршрут в 4 часа утра, альпинист Джеф Лоу к вечеру достиг пика «Свободная Корея». Переночевав на вершине, на следующий день он вышел в то же время и быстро спустился обратно по пути подъёма. Докажите, что на маршруте есть такая точка, которую Лоу во время спуска и во время подъёма проходил в одно и то же время суток.

3. Ницше расставил в произвольном порядке 10-томное собрание своих сочинений. Назовем беспорядком пару томов, для которых том с бóльшим номером стоит левее. Для данной расстановки томов посчитано число S всех беспорядков. Какие значения может принимать S?

4. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001!+2, 1001!+3, \dots, 1001!+1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых чисел?

5. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что число решений уравнения $P(P(x))=0$ в $\mathbb{R}$ не меньше числа решений уравнения $P(x)=0$ в $\mathbb{R}$.

6. На плоскости даны $2n$ синих и $2n$ красных точек — всего $4n$ точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Докажите, что можно ввести декартовы координаты (x,y) на этой плоскости так, чтобы каждому из неравенств «$x>0$» и «$x<0$» удовлетворяли ровно n синих и ровно n красных из данных точек.

7. **Двумерная теорема о бутерброде.**
   На плоскости выбрали два ограниченных множества точек с корректно определённой площадью. Покажите, что существует прямая, делящая оба выбранных множества на две равновеликие части.

8. На плоскости даны $4n$ точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Докажите, что можно ввести декартовы координаты (x,y) на этой плоскости так, чтобы каждой из систем неравенств

$$x>0, y>0, \qquad x<0, y>0, \qquad x<0, y<0, \qquad x>0, y<0$$

   удовлетворяли ровно n из данных точек.

9. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

Непрерывность

1. Матч между двумя футбольными командами закончился со счетом $8 : 5$. Докажите, что был момент, когда первая команда забила столько же мячей, сколько второй оставалось забить.

2. Выйдя на маршрут в 4 часа утра, альпинист Джеф Лоу к вечеру достиг пика «Свободная Корея». Переночевав на вершине, на следующий день он вышел в то же время и быстро спустился обратно по пути подъёма. Докажите, что на маршруте есть такая точка, которую Лоу во время спуска и во время подъёма проходил в одно и то же время суток.

3. Ницше расставил в произвольном порядке 10-томное собрание своих сочинений. Назовем беспорядком пару томов, для которых том с бóльшим номером стоит левее. Для данной расстановки томов посчитано число S всех беспорядков. Какие значения может принимать S?

4. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых чисел?

5. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что число решений уравнения $P(P(x)) = 0$ в $\mathbb{R}$ не меньше числа решений уравнения $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}$.

6. На плоскости даны $2n$ синих и $2n$ красных точек — всего $4n$ точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Докажите, что можно ввести декартовы координаты (x, y) на этой плоскости так, чтобы каждому из неравенств «$x > 0$» и «$x < 0$» удовлетворяли ровно n синих и ровно n красных из данных точек.

7. **Двумерная теорема о бутерброде.**
   На плоскости выбрали два ограниченных множества точек с корректно определённой площадью. Покажите, что существует прямая, делящая оба выбранных множества на две равновеликие части.

8. На плоскости даны $4n$ точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Докажите, что можно ввести декартовы координаты (x, y) на этой плоскости так, чтобы каждой из систем неравенств
$$x > 0, y > 0, \qquad x < 0, y > 0, \qquad x < 0, y < 0, \qquad x > 0, y < 0$$
   удовлетворяли ровно n из данных точек.

9. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.