Метод крайнего

1. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 100 в ряд так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?

2. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\sqrt{3}/4$.

3. Давным-давно страной Тарнией правил царь Ятианр. Чтобы тарнийцы поменьше рассуждали, он придумал для них простой язык. Его алфавит состоял всего из шести букв: А, И, Н, Р, Т, Я, но порядок их отличался от принятого в русском языке. Словами этого языка были все последовательности, использующие каждую из этих букв по одному разу. Ятианр издал полный словарь нового языка. В соответствии с алфавитом первым словом словаря оказалось "Тарния". Найдите слово, следовавшее за именем Ятианр в словаре.

4. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

5. На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

6. Некоторые точки плоскости окрашены в синий или красный цвет так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой; точек каждого цвета не меньше трёх. Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трёх сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

7. Докажите, что не существует попарно различных натуральных чисел x, y, z, t, для которых было бы справедливо соотношение $x^x + y^y = z^z + t^t$.

8. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно один знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно $2, 3, 4, ..., 99$ знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

9. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.

10. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом, меньшим 1, т.е. $M \neq \mathcal{H}_{O_1}^{k_1}(M) \cup \mathcal{H}_{O_2}^{k_2}(M)$ при $0 < k_1, k_2 < 1$.

Метод крайнего

1. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 100 в ряд так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?

2. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\sqrt{3}/4$.

3. Давным-давно страной Тарнией правил царь Ятианр. Чтобы тарнийцы поменьше рассуждали, он придумал для них простой язык. Его алфавит состоял всего из шести букв: А, И, Н, Р, Т, Я, но порядок их отличался от принятого в русском языке. Словами этого языка были все последовательности, использующие каждую из этих букв по одному разу. Ятианр издал полный словарь нового языка. В соответствии с алфавитом первым словом словаря оказалось "Тарния". Найдите слово, следовавшее за именем Ятианр в словаре.

4. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

5. На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

6. Некоторые точки плоскости окрашены в синий или красный цвет так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой; точек каждого цвета не меньше трёх. Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трёх сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

7. Докажите, что не существует попарно различных натуральных чисел x, y, z, t, для которых было бы справедливо соотношение $x^x + y^y = z^z + t^t$.

8. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно один знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно $2, 3, 4, ..., 99$ знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

9. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.

10. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом, меньшим 1, т.е. $M \neq \mathcal{H}_{O_1}^{k_1}(M) \cup \mathcal{H}_{O_2}^{k_2}(M)$ при $0 < k_1, k_2 < 1$.