

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: Дополнительные задачи

1. На клетчатой бумаге лежит фигура площади меньшей 1. Покажите, что можно подвинуть ее так, чтобы вершины клеток ею не накрывались.
2. На координатной плоскости даны:
 - прямая $2x - 3y = 1$,
 - окружность $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$,
 - парабола $x = y^2$.

Запишите уравнения фигур, в которые перейдут данные фигуры ...

- а) ... при $\mathcal{T}^{(-1;0)}$? б) ... при $\mathcal{R}_{(0;0)}^{90^\circ}$? в) ... при $\mathcal{S}_{x=0}$?

3. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, точки K и M — середины отрезков BD и EF . Докажите, что треугольник AMK правильный.
4. На сторонах остроугольного треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , AB_1C и ABC_1 . Известно, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке O . Эта точка называется *точкой Торричелли* треугольника ABC . Докажите, что точка Торричелли — такая точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника ABC минимальна.
5. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1 , B_1 и C_1 ; точки A_2 , B_2 и C_2 симметричны этим точкам относительно биссектрис соответствующих углов треугольника. Докажите, что стороны треугольника ABC параллельны соответствующим сторонам треугольника $A_2B_2C_2$.
6. Точки K и L на сторонах соответственно AB и AC остроугольного треугольника ABC таковы, что $KL \parallel BC$; M — точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках K и L к отрезкам AB и AC . Докажите, что точки A , M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.
7. Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей внеписанной окружностью лежат на одной прямой.
8. а) На плоскости даны две окружности. Найдите все гомотетии, переводящие одну из них в другую.
б) **Лемма Архимеда.** Большая окружность Ω внутренним образом касается меньшей окружности ω в точке M . Хорда AB окружности Ω касается ω в точке P . Докажите, что MP — биссектриса треугольника AMB .
9. Каждую сторону n -угольника в процессе обхода по часовой стрелке продолжили на её длину. Оказалось, что новые концы построенных отрезков служат вершинами правильного n -угольника. Докажите, что исходный n -угольник — правильный.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: Дополнительные задачи

1. На клетчатой бумаге лежит фигура площади меньшей 1. Покажите, что можно подвинуть ее так, чтобы вершины клеток ею не накрывались.
2. На координатной плоскости даны:
 - прямая $2x - 3y = 1$,
 - окружность $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$,
 - парабола $x = y^2$.

Запишите уравнения фигур, в которые перейдут данные фигуры ...

- а) ... при $\mathcal{T}^{(-1;0)}$? б) ... при $\mathcal{R}_{(0;0)}^{90^\circ}$? в) ... при $\mathcal{S}_{x=0}$?

3. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, точки K и M — середины отрезков BD и EF . Докажите, что треугольник AMK правильный.
4. На сторонах остроугольного треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , AB_1C и ABC_1 . Известно, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке O . Эта точка называется *точкой Торричелли* треугольника ABC . Докажите, что точка Торричелли — такая точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника ABC минимальна.
5. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1 , B_1 и C_1 ; точки A_2 , B_2 и C_2 симметричны этим точкам относительно биссектрис соответствующих углов треугольника. Докажите, что стороны треугольника ABC параллельны соответствующим сторонам треугольника $A_2B_2C_2$.
6. Точки K и L на сторонах соответственно AB и AC остроугольного треугольника ABC таковы, что $KL \parallel BC$; M — точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках K и L к отрезкам AB и AC . Докажите, что точки A , M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.
7. Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей внеписанной окружностью лежат на одной прямой.
8. а) На плоскости даны две окружности. Найдите все гомотетии, переводящие одну из них в другую.
б) **Лемма Архимеда.** Большая окружность Ω внутренним образом касается меньшей окружности ω в точке M . Хорда AB окружности Ω касается ω в точке P . Докажите, что MP — биссектриса треугольника AMB .
9. Каждую сторону n -угольника в процессе обхода по часовой стрелке продолжили на её длину. Оказалось, что новые концы построенных отрезков служат вершинами правильного n -угольника. Докажите, что исходный n -угольник — правильный.