Композиция движений

!! **Теорема Шаля.**

Всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости представляет собой либо поворот, либо параллельный перенос. Всякое меняющее ориентацию движение плоскости является осевой или скользящей симметрией.

1. На плоскости дан квадрат $ABCD$ (ориентированный против часовой стрелки). Чему равны:

   (a) $\mathcal{R}_B^{90^\circ} \circ \mathcal{T}^{\overrightarrow{AB}}$?

   (b) $\mathcal{R}_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ}$?

   (c) $\mathcal{T}^{\overrightarrow{CB}} \circ \mathcal{S}_{CD} \circ \mathcal{S}_{AD}$?

   (d) $\mathcal{R}_D^{90^\circ} \circ \mathcal{R}_B^{90^\circ} \circ \mathcal{R}_C^{90^\circ} \circ \mathcal{R}_A^{90^\circ}$?

   `Легенда:`

   $\mathcal{R}_O^{\varphi}$ — поворот вокруг точки O на угол φ;

   $\mathcal{T}^{\overrightarrow{v}}$ — параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{v}$;

   $\mathcal{S}_\ell$ — осевая симметрия относительно прямой ℓ.

2. Пусть движение плоскости переводит фигуру F в фигуру F'. Для каждой пары соответственных точек A и A' рассмотрим середину X отрезка AA'. Докажите, что либо все точки X совпадают, либо все они лежат на одной прямой, либо образуют фигуру, подобную F.

3. (a) **Теорема Наполеона.**

   На сторонах остроугольного треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются центры правильных треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1, тоже правильный.

   (b) Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O. Эта точка называется *первой точкой Торричелли* треугольника ABC.

   (c) Докажите, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$.

   (d) Докажите, что первая точка Торричелли – такая точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника ABC минимальна.

4. На плоскости даны 101 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Постройте какой-нибудь 101-угольник, серединами сторон которого являются данные точки.

5. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1; точки A_2, B_2 и C_2 симметричны этим точкам относительно биссектрис соответствующих углов треугольника. Докажите, что стороны треугольника ABC параллельны соответствующим сторонам треугольника $A_2B_2C_2$.

Композиция движений

!! **Теорема Шаля.**

Всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости представляет собой либо поворот, либо параллельный перенос. Всякое меняющее ориентацию движение плоскости является осевой или скользящей симметрией.

1. На плоскости дан квадрат $ABCD$ (ориентированный против часовой стрелки). Чему равны:

   (a) $\mathcal{R}_B^{90^\circ} \circ \mathcal{T}^{\overrightarrow{AB}}$?

   (b) $\mathcal{R}_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ}$?

   (c) $\mathcal{T}^{\overrightarrow{CB}} \circ \mathcal{S}_{CD} \circ \mathcal{S}_{AD}$?

   (d) $\mathcal{R}_D^{90^\circ} \circ \mathcal{R}_B^{90^\circ} \circ \mathcal{R}_C^{90^\circ} \circ \mathcal{R}_A^{90^\circ}$?

   `Легенда:`

   $\mathcal{R}_O^{\varphi}$ — поворот вокруг точки O на угол φ;

   $\mathcal{T}^{\overrightarrow{v}}$ — параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{v}$;

   $\mathcal{S}_\ell$ — осевая симметрия относительно прямой ℓ.

2. Пусть движение плоскости переводит фигуру F в фигуру F'. Для каждой пары соответственных точек A и A' рассмотрим середину X отрезка AA'. Докажите, что либо все точки X совпадают, либо все они лежат на одной прямой, либо образуют фигуру, подобную F.

3. (a) **Теорема Наполеона.**

   На сторонах остроугольного треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются центры правильных треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1, тоже правильный.

   (b) Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O. Эта точка называется *первой точкой Торричелли* треугольника ABC.

   (c) Докажите, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$.

   (d) Докажите, что первая точка Торричелли – такая точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника ABC минимальна.

4. На плоскости даны 101 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Постройте какой-нибудь 101-угольник, серединами сторон которого являются данные точки.

5. Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1; точки A_2, B_2 и C_2 симметричны этим точкам относительно биссектрис соответствующих углов треугольника. Докажите, что стороны треугольника ABC параллельны соответствующим сторонам треугольника $A_2B_2C_2$.