Инварианты

1. Над числами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ можно производить следующую операцию: к любым двум числам прибавить по единице. Можно ли с помощью таких операций сделать все числа равными?

2. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 стоит "+" или "−". За один ход можно поменять знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли через несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

(a)

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

(b)

+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

(c)

+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
−	+	+	+

(d)

+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	+	+

3. Можно ли из набора 499, 500, 502 получить набор 498, 500, 501, если разрешено набор a, b, c заменять на...

   (a) ... $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$? (b) ... ab/c, bc/a, ca/b?

4. На доске написаны числа 1 и 2. Каждый день специальный научный консультант заменяет два написанных числа на их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Однажды одним из написанных чисел (каким — неизвестно) оказалось $504288139/98615913$. Каким в этот момент было другое число?

5. На доске написаны числа от 1 до 20. Действие заключается в замене пары чисел x, y на число $xy + x + y$. Это действие производится, пока на доске не останется одно число. Каким может быть это число?

6. Пусть X — число, десятичная запись которого состоит из 77^{77} девяток. Обозначим за $S(n)$ сумму цифр числа n. Найдите $S(S(S(S(X))))$.

7. В одной вершине куба стоит 1, а в остальных – 0. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

8. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вписать вместо них цифру, отличную от стертых. Докажите, что если в результате таких операций на доске останется одна цифра, то она не зависит от порядка, в котором производилось стирание.

9. В стране Серобуромалинии живёт 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). По трое хамелеоны не встречаются. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Инварианты

1. Над числами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ можно производить следующую операцию: к любым двум числам прибавить по единице. Можно ли с помощью таких операций сделать все числа равными?

2. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 стоит "$+$" или "$-$". За один ход можно поменять знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли через несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

(a)

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

(b)

+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

(c)

+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
−	+	+	+

(d)

+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	+	+

3. Можно ли из набора 499, 500, 502 получить набор 498, 500, 501, если разрешено набор a, b, c заменять на...

   (a) ... $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$? (b) ... ab/c, bc/a, ca/b?

4. На доске написаны числа 1 и 2. Каждый день специальный научный консультант заменяет два написанных числа на их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Однажды одним из написанных чисел (каким — неизвестно) оказалось $504288139/98615913$. Каким в этот момент было другое число?

5. На доске написаны числа от 1 до 20. Действие заключается в замене пары чисел x, y на число $xy+x+y$. Это действие производится, пока на доске не останется одно число. Каким может быть это число?

6. Пусть X — число, десятичная запись которого состоит из 77^{77} девяток. Обозначим за $S(n)$ сумму цифр числа n. Найдите $S(S(S(S(X))))$.

7. В одной вершине куба стоит 1, а в остальных – 0. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

8. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вписать вместо них цифру, отличную от стертых. Докажите, что если в результате таких операций на доске останется одна цифра, то она не зависит от порядка, в котором производилось стирание.

9. В стране Серобуромалинии живёт 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). По трое хамелеоны не встречаются. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?