Комплексные числа и их свойства

▷ Задачи 1—3 и 5 принимаются только на семинаре 7 марта. Задачи 6—10 и 4 принимаются во время приёмов задач, но строго до контрольной работы (21 марта, время уточняется).

Задача 1. Выполните действия: а) $\dfrac{5+5i}{3-4i}+\dfrac{20}{4+3i}$; б) $\dfrac{(1-5i)^5-1}{(1+i)^5-1}$; в) $(1+i)^{100}$

Задача 2. Квадрат каких чисел равен -1? А i? А $7+24i$?

Задача 3. Найдите все такие числа, для которых выполняется:
а) $iz+3=2i$; б) $2z+i\overline{z}=1+3i$; в) $z^4+(2-z)^4=32$.

Задача 4. Докажите, что расстояние между точками z_1, z_2 равно $|z_1-z_2|$. Изобразите на плоскости точки, для которых: а) $|z-i|=1$; б) $|z-i|=|iz-1|$; в) $\arg(iz-1)=\pi/3$.

Задача 5. Вычислите корни третьей степени из 1, -1 и i. Решите уравнение $z^4=z$.

Задача 6. Докажите и объясните геометрический смысл:
а) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ б) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

Задача 7. Докажите, что все корни n-й степени из единицы являются степенями числа $\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. Вычислите сумму k-х степеней всех корней n-й степени из единицы.

▷ Теорема (без доказательства): любой отличный от константы многочлен (от одной переменной) с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень.

Задача 8. Выведите из предыдущей теоремы основную теорему алгебры: *любой отличный от константы многочлен (от одной переменной) с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Задача 9. Разложите многочлен x^6+27 на множители не более чем второй степени с вещественными коэффициентами.

Задача 10. Докажите, что любой многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше 2.