

Нелинейные диофантовы уравнения

1. Решите в \mathbb{Z} уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
2. Решите в \mathbb{N} и отдельно в \mathbb{Z} уравнение $abc = ab + bc + ca$.
3. * Решите в \mathbb{Z} уравнение $3^m + 7 = 2^n$.
4. * Рассмотрим для $k, n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{P}$ уравнение $2^k + 1 = p^n$.
 - а) Решите его при условии $n > 1$.
 - б) Докажите, что если $n = 1$, то $k = 2^m$.

Пифагоровы тройки

5. Пусть $a^2 + b^2 = c^2$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $abc : 60$.
6. Докажите, что...
 - а) ... $x^2 + y^2 = z^4$ имеет ∞ примитивных $((x, y, z) = 1)$ решений в \mathbb{N} ;
 - б) * ... $x^4 + y^4 = z^2$ не имеет решений в \mathbb{N} .

Уравнение Пелля

7. Решите уравнение Пелля в «неправильном» случае: при $a = d^2$, $d \in \mathbb{N}$.
8. Докажите, что последовательность $a_n = 1 + 17n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) содержит бесконечно много квадратов целых чисел.
9. Решите в целых числах уравнение $x^2 - xy - y^2 = 1$.
10. * Докажите, что при любом натуральном $n > 2$ число 2^n можно представить в виде $x^2 + 7y^2$, где x и y — нечётные числа.
11. * Рассмотрим уравнение $2x^2 + x = 3y^2 + y$.
 - а) Докажите, что $x - y$ и $2x + 2y + 1$ — точные квадраты.
 - б) Докажите, что это уравнение имеет бесконечно много решений.

Нелинейные диофантовы уравнения

1. Решите в \mathbb{Z} уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
2. Решите в \mathbb{N} и отдельно в \mathbb{Z} уравнение $abc = ab + bc + ca$.
3. * Решите в \mathbb{Z} уравнение $3^m + 7 = 2^n$.
4. * Рассмотрим для $k, n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{P}$ уравнение $2^k + 1 = p^n$.
 - а) Решите его при условии $n > 1$.
 - б) Докажите, что если $n = 1$, то $k = 2^m$.

Пифагоровы тройки

5. Пусть $a^2 + b^2 = c^2$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $abc : 60$.
6. Докажите, что...
 - а) ... $x^2 + y^2 = z^4$ имеет ∞ примитивных $((x, y, z) = 1)$ решений в \mathbb{N} ;
 - б) * ... $x^4 + y^4 = z^2$ не имеет решений в \mathbb{N} .

Уравнение Пелля

7. Решите уравнение Пелля в «неправильном» случае: при $a = d^2$, $d \in \mathbb{N}$.
8. Докажите, что последовательность $a_n = 1 + 17n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) содержит бесконечно много квадратов целых чисел.
9. Решите в целых числах уравнение $x^2 - xy - y^2 = 1$.
10. * Докажите, что при любом натуральном $n > 2$ число 2^n можно представить в виде $x^2 + 7y^2$, где x и y — нечётные числа.
11. * Рассмотрим уравнение $2x^2 + x = 3y^2 + y$.
 - а) Докажите, что $x - y$ и $2x + 2y + 1$ — точные квадраты.
 - б) Докажите, что это уравнение имеет бесконечно много решений.